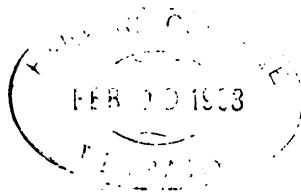
Lorenzo Mascheroni
(1750-1800)

LORENZO MASCHERONI

La Geometria del Compasso

(Nuova edizione)

PALERMO
PREM. CASA ED. « ERA NOVA »
1901

LORENZO MASCHERONI

e le sue opere matematiche

LORENZO MARIO MASCHERONI DELL'OLMO nacque a Castagneta vicino Bergamo il 13 maggio 1750 da Paolo e da Maria Ceribelli (1). Entrato giovanetto nelle scuole del Seminario di Bergamo, le frequentò fino al 18° anno quale scolaro laico, riscotendo sempre il plauso dei suoi maestri e pel suo ingegno e per la sua diligenza: nel 1768 vestì l'abito di cherico e 6 anni dopo fu ordinato sacerdote.

Non ancora ventenne si vuole dai suoi biografi ch' Egli succedesse nella cattedra di rettorica nel medesimo Seminario al suo maestro Ottavio Bolgeni: il 5 agosto del 1773 venne nominato per lo stesso insegnamento nel *Collegio Mariano*, ove erano le scuole pubbliche di Bergamo.

In questo periodo di tempo coltivò l'amena letteratura, ed è nel suo 26° anno quando volse la sua vasta e profonda mente agli studi della filosofia e della matematica. Egli stesso solea dire che i primi passi nello studio della scienza esatta gli costarono non poca fatica; ma con la pazienza e l'acutezza del suo ingegno vinse felicemente tutte le difficoltà. E nel 1778 venne nominato nelle medesime scuole di Bergamo Lettore di filosofia, insegnamento che comprendea la logica, la metafisica e la fisica ed Egli vi aggiunse quello della matematica elementare prima e poi quello del calcolo integrale e differenziale, cosa novissima per quelle scuole. Però gl'invidiosi da una parte ed i re-

trogradi dall' altra, avendo Egli osato di andare contro il sistema fino allora permanente della cieca devozione ai dettati dello Stagirita e di aver seguito le orme del Galileo, gli mossero guerra, ed il Consiglio, che presiedeva alle publiche scuole di Bergamo, con le sue deliberazioni incominciò ad inceppare il libero insegnamento di Lui, tanto che Egli fu costretto nel 1786 a rinunziare al suo posto e andare a Pavia, ove in quell'Ateneo trovò campo più propizio al suo ingegno (2). Ivi, succedendo all'illustre Paoli, insegnò gli elementi di Algebra e di Geometria prima e poi Matematica applicata; e negli anni scolastici 1789-90, 1793-94 ebbe altresì la carica di Rettore.

Entrate le truppe francesi a Milano il 6 maggio 1796 e chiusasi per poco l'Università di Pavia, alla riapertura il MASCHERONI fu riconfermato alla sua cattedra; nel 1797 fu dapprima eletto alla *Società di Pubblica Istruzione* e poi al *Corpo legislativo consulente*, il quale, promulgata la Republica Cisalpina, presiedette per qualche tempo ai publici affari. Nello stesso anno fu dal Bonaparte mandato prima in Valle Camonica come Commissario del *Direttorio esecutivo* a stabilire i confini fra' Dipartimenti del Serio e del Mella, e poi nominato fra' Rappresentanti del popolo nel gran Consiglio e riconfermato per l'anno successivo.

Avendo il governo della Republica francese nominata una Commissione di matematici per studiare un nuovo sistema di pesi e misure dedotto dalla grandezza della Terra, il 25 maggio 1798 il Direttorio invitò a Parigi il MASCHERONI per prendere parte ai lavori di questa commissione; ed il 17 settembre dello stesso anno Egli si recò nella capitale della Francia, ove si acquistò la stima e la benevolenza non solo dei suoi illustri colleghi della commissione, ma di tutti i dotti e scienziati che lo avvicinarono. Ivi però ben presto incominciarono pel MASCHERONI i dolori che lo condussero alla tomba. Entrati gli Austro-Russi a Milano il 14 aprile 1799 e decaduta la Republica Cisalpina, Egli si trovò senza gli stipendi che gli venivano dall'Italia, e fu costretto a cercar di che vivere accettando l'insegnamento della Fisica e della Matematica nel Collegio di Antonio Dubois, al quale veniva raccomandato dal Lagrange. V' insegnò 4 mesi, dal 13 ottobre 1799 al 9 marzo 1800, quando e pel dolore di sapere la sua cara patria sotto il dispotismo austriaco e pel diverso regime di vita e per la fatica dell'insegnamento gravemente si ammalò. Dopo la battaglia di Marengo essendo già stato dal Bonaparte,

primo Console della Repubblica Francese, rinominato alla sua cattedra nell'Università di Pavia, Egli sperava di guarire presto per ritorna- in Italia, ma il male non volle risparmiarlo, ed il 14 luglio del 1800, per ostinata malattia di petto, in età di 50 anni, quell'*alma gentile*

> Dopo molto affannarsi entro il suo velo
> E anelar stanca su l'uscita, alfine
> L'ali aperse, e raggiando alzossi al cielo.

Morì, scrisse il Mongili, come muore l'uomo dabbene che visse per dare esempi di virtù e per accrescere il sacro tesoro delle scientifiche cognizioni.

Fu sepolto a Parigi con onori degni di Lui; ma, fatto doloroso, oggi ignorasi ove riposano le spoglie mortali del gentile poeta ed acuto matematico Bergamasco.

***

Nella *Bibliografia mascheroniana* del Ravelli trovasi un esteso *Elenco delle biografie, elogi e notizie* del nostro Autore (3). Altre notizie bibliografiche si possono desumere dal volume del Fiammazzo e dalle opere quivi citate. Senza fermarci in queste notizie daremo qui l'elenco delle opere matematiche del MASCHERONI con un breve cenno su di esse, tralasciando completamente di occuparci delle sue opere letterarie e politiche.

1. *Della più bella proprietà della curva isocrona a direzioni convergenti*, ecc.

E questa una breve nota pubblicata il 19 settembre 1782 e dedicata al matematico Achille Alessandri di Bergamo, ove dimostrasi che la curva isocrona tende verso una spirale infinita, la quale fa un angolo costante col raggio vettore. È il primo lavoro di matematica del MASCHERONI.

2. Nello stesso anno 1782 publicò un opuscoletto intorno alla *Maniera di misurare l'inclinazione dell'ago calamitato* (Bergamo, 1782, in-8° con una tav.)

In quel tempo per misurare l'intensità della forza magnetica in un luogo non conosceasi che un metodo inesatto del Muscenbroeck. Il MASCHERONI suggerisce in questo suo studio di sospendere ad

angolo retto l'ago calamitato all'estremo inferiore di una verga verticale di rame e in modo che possa facilissimamente oscillare per la diversa inclinazione magnetica in diversi luoghi, o nello stesso luogo in diversi tempi. Disposto allora l'ago nel meridiano magnetico del luogo, esso non si mantiene orizzontale, ma un suo estremo s'inclinerà verso il nord e con le sue oscillazioni descriverà una curva trascendente, le cui ordinate, come il MASCHERONI dimostra, sono proporzionali alla forza magnetica. Egli descrive la natura della curva, che molta analogia presenta con la concoide di Nicomede e coll'epicicloide di Giovanni Bernoulli, ne studia i punti singolari, dà la regola per tracciare le tangenti e ne determina la quadratura.

3. *Sulle curve che servono a delineare le ore ineguali degli antichi nelle superficie piane.*

Questa breve nota fu la prima volta inserita nel vol. VII degli *Opuscoli scelti sulle scienze e sulle arti* (Milano, 1784) e poi ripubblicata nella 2ª ed. dell'opera seguente.

In essa dimostrò esatta l'osservazione anche fatta dall'ab. Scipione Dehe, che le ore ineguali dei Giudei e dei Romani non debbano essere segnate su superficie piane da rette; e ad illustrare ciò incise una *Meridiana* sopra un disco di ottone, oggi posseduta dalla Biblioteca civica di Bergamo, ove sono tracciate le linee orarie dei diversi sistemi antichi.

4. *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte.*

Quest'opera, che viene generalmente ritenuta la principale e per la quale ben presto l'Autore salì in fama di valente geometra, fu stampata la prima volta in Bergamo nel 1785 (in-4º, con 13 tav.) e poi coll'elogio del March. Ferdinando Landi a Milano nel 1829 (in-16º, con 5 tav.)

In essa Egli si addimostra non solo maestro della Meccanica e della Geometria degli antichi, ma anche del Calcolo infinitesimale; e quantunque l'argomento era già stato trattato da valenti matematici come Giacomo Bernoulli, il Gregory, il la Hyre, il Lorgna, pure Egli si mantiene originale e aggiunge nuove ed importanti verità sull'argomento. Considerando che la materia non si può ritenere perfettamente rigida ed ugualmente dura, e che quindi il sottarco non è una vera curva di equilibrio, trasferisce questa nella linea che passa pei centri di gravità di tutti i cunei componenti la volta, studia la superficie d'equilibrio, luogo di queste linee nelle diverse se-

zioni verticali e, mediante il principio delle velocità virtuali, crea la scienza del solido fondamento degli edifizi, esaminando l'equilibrio in tutte le specie di volte.

Per quest'opera si ebbe lodi dai matematici dell'epoca ed il Bossut scriveagli : « Vous avez traité dans cet ouvrage un grand nombre « de questions très-intèressantes et très-utiles; et vous y montrez une « grande sagacité á manier l'analyse. Vous me paroissez destiné á « honorer votre patrie ».

5. Nella seconda edizione italiana (Pavia 1787) del corso di matematica dell'abate Bossut tradotto dal p. Andrea Mozzone, libro di testo in moltissime scuole italiane ed anche quello usato dal MASCHERONI per le sue lezioni di matematica elementare nell'Università di Pavia, v'inserì alcune sue note in Appendice, note che vennero poi riprodotte, in tutto o in parte, in altre edizioni del medesimo Corso. Fra le note trovasi il *Metodo di misurare i poligoni piani*, che poi nello stesso anno a Pavia fu anche pubblicato a parte.

Quivi insegna a misurare un qualsiasi poligono, convesso o concavo, senza far uso della risoluzione del poligono in triangoli, determinando alcuni elementi da altri dati. Alla fine trovasi la descrizione di un traguardo, mediante il quale non solo si ha la misura dell'angolo, ma anche il seno ed il coseno di esso. In questo opuscolo oltre la novità sono da ammirarsi l'ordine e la chiarezza, doti che del resto riscontransi in tutte le opere del MASCHERONI.

L'Huilier inserì i problemi e le soluzioni di quest'operetta nella sua *Polygonométrie,* publicata due anni dopo (Ginevra, 1789), senza far cenno del matematico italiano. Ciò il MASCHERONI nobilmente accenna nella prefazione dei suoi *Problemi per gli agrimensori*, colle seguenti parole che trascriviamo, poichè addimostrano il nobile animo suo: « Io conobbi nel leggere questo libro (dell'Huilier) non solo che « il mio metodo conteneva tutti i suoi problemi, ma inoltre che io « nelle soluzioni analitiche presentava le stesse formole e camminava « sulle stesse traccie di un autore che aveva stampato il suo libro « due anni dopo il mio: ed ebbi in vero meraviglia nel vedermi « coincidere in tal modo con quel matematico ». E soggiunge poi: « Non ostante ciò, merita ancora il libro di M. l'Huilier, che tu te « ne prevalga, sì per l'erudizione, che per le dimostrazioni geome- « triche da lui aggiunte ».

6. *Ad notationes ad calculum integralem Euleri in quibus non-*

nulla problemata ab Eulero proposita resolventur, etc. (Ticini, 1790).

7. *Adnotationum ad calculum integralem Euleri in quibus nonnullae formulae ab Eulero propositae plenius evolvuntur. Pars altera, etc.* (Ticini, 1792).

Questi due volumetti, ove l'Autore addimostra sempre più l'acutezza del suo ingegno, hanno lo scopo di risolvere varie quistioni proposte dal più grande matematico del sec. XVIII e sopratutto sono da notarsi le ricerche intorno al così detto logaritmo integrale.

8. Alla fine del secondo volume della seconda edizione veronese delle opere di Wolfio (4) pubblicato nel 1791, vi sono le *Adnotationes Mascheronii in R. Archigymnasio Ticinensi Mathem. Prof.*

Sono quindici note che tutte si riferiscono alla parte meccanico-statica dell'opera.

9. *Problemi per gli Agrimensori con varie soluzioni.*

Quest'opera, che dà un contributo alla *geometria della riga*, fu la prima volta publicata a Pavia nel 1793 (in-8° con 4 tav.) e poi a Milano nel 1802 col titolo:

Problemi di geometria colle dimostrazioni aggiunte dal cittadino Sacchi, capitano in 2. d'artiglieria, ecc. (in-8° con 4 tav.)

Le dimostrazioni, come lo stesso Sacchi dice nella sua prefazione, sono state consigliate dal MASCHERONI stesso.

Della medesima opera a Milano nel 1832 apparve un'altra edizione col titolo:

Problemi di geometria colle dimostrazioni del capitano Sacchi, edizione arricchita coll'aggiunta di alcuni problemi ricavati da un esemplare della prima edizione postillata dall'autore (in-16°, con 5 tav.).

Inoltre quest'opera è stata tradotta in francese da un anonimo e publicata a Parigi nel 1803.

Nella lusinga che anche di questo libro si faccia una nuova edizione, la quale possa essere studiata dai nostri giovani delle scuole secondarie, ne diamo qui un breve sommario.

L'opera costa di 5 libri. Nel 1° che comprende l'altimetria, l'Autore dà dei metodi per misurare la distanza di punti inaccessibili; nel 2° dà dei metodi per la misura degli angoli e per tracciare rette ortogonali senza squadra o grafometri; il 3° contiene problemi sulla misura di superficie piane o curve e sulla loro divisione in parti che stiano fra loro in dato rapporto; nel 4° espone la sua poligonometria già publicata nell'opuscoletto di cui si fa cenno innanzi (n. 5), ge-

neralizzando le formole per qualunque spazio chiuso da quantesivogliano rette; nel 5° infine tratta della misura dei solidi poliedri.

10. Nel vol. II (fasc. di Giugno, 1795, pag. 185-206) del *Giornale fisico-medico di L. Brugnatelli*, che publicavasi a Pavia, evvi del MASCHERONI una

Lettera all'illustre signor don Annibale Beccaria patrizio milanese, con alcuni problemi geometrici sciolti col cerchio senza la regola.

E il primo saggio della *Geometria del compasso*, come l'Autore dice nella sua introduzione a quest'opera (v. pag. 6 della presente edizione) e contiene fra le altre costruzioni la divisione della circonferenza col solo compasso in 24 ed in 120 parti eguali. La prima semplicissima è stata riportata nella presente opera, la seconda invece complicata è stata dall'Autore sostituita da altra molto più semplice.

11. Due anni dopo diè alla luce l'opera

La Geometria del compasso (Pavia, presso gli eredi di Pietro Galeazzi, anno V della Republica Francese, 1797, in-8· con 14 tav.) che integralmente ripublichiamo in questa nuova edizione.

Egli ideò questa opera *originale e curiosa* (5) che rese presso tutti i matematici glorioso il suo nome, per venire in aiuto ai costruttori d'istrumenti astronomici, poichè questi pervenivano a dividere la circonferenza in parti eguali mediante ripetuti tentativi, facendo uso anche di scale e di doppi piani, senza però raggiungere la precisione geometrica desiderata. Egli, mediante tre punti fuori della circonferenza determinati geometricamente, perviene a costruire mediante il solo compasso tutte le possibili divisioni della circonferenza senza nemmeno l'errore di un sesto di minuto secondo; ma non sono queste le sole costruzioni del libro.

La risoluzione di qualsiasi problema si può ridurre alla determinazione di punti, poichè anche quando il problema richieda o tracciare una retta o descrivere una circonferenza, quella è individuata da due suoi punti, questa dal centro e da un punto della sua periferia; ed i punti richiesti sono sempre ottenuti mediante la mutua intersezione di rette e circonferenze. Facendo uso dei due istrumenti, la riga ed il compasso, si risolvono tutti i problemi, poichè con la sola riga si determina il punto d'intersezione di due rette, col solo compasso i punti d'intersezione di due circonferenze e con l'una e con l'altro i punti d'intersezione della retta e della circonferenza.

Il Cardano (6), il Tartaglia (7) ed il Benedetti (8), geometri ita-

liani del sec. XVI, si proposero e riuscirono nell'intento, di costruire tutti i problemi euclidei, cioè di 1° e di 2° grado, mediante la riga ed il compasso di apertura costante, geometria del resto non ignorata dai Greci come rilevasi da un passo di Pappo Alessandrino nella sua *Collezione matematica*, e che già avea destato l'interesse degli Arabi, come risulta da un *Libro di costruzioni geometriche* di Abû 'l Wafâ (9); il Poncelet (10) e lo Steiner (11) han poi dimostrato che i detti problemi possono altresì essere costruiti con la riga e con una circonferenza fissa di noto centro nel foglio di disegno. Il Brianchon (12) invece al principio del sec. XIX ha coltivato un altro ramo della Geometria, proponendosi la risoluzione di alcuni problemi mediante l'uso della sola riga. Pria del Brianchon si occuparono però della *Geometria della riga*, avendo specialmente di mira i problemi pratici che interessano gli agrimensori e gli artiglieri, quei problemi cioè che si propongono di eseguire sul terreno diverse operazioni geometriche, come *misurare distanze*, *tracciare parallele*, ecc., lo Schooten (13), il Lambert (14), il Servois (15), ed il nostro MASCHERONI nell'opera qui precedentemente accennata (v. n. 9). Inoltre la *Geometria della riga*, la quale si collega alla *Geometria proiettiva* che pone fra tutte le linee in evidenza la *retta*, fu molto coltivata nel secolo or ora spirato da una schiera di valenti geometri di tutti i paesi (16).

Ancora il Coatpont in un articolo publicato nel 1877 nella *Nouvelle correspondance mathématique* ha concepito la riga sotto un altro aspetto.

Egli dice: « Je définis *règle* une *lame* offrant deux côtés rectili- « gnes et paralléles, permettant de tracer des parallèles équidistantes», fondando così un nuovo ramo della Geometria, *la Geometria della riga piatta* (17). Non possiamo qui per i limiti prefissici dare più ampie notizie intorno a queste branche della Geometria, ma considerando l'utilità che di tali studî ne ricaverebbe specialmente l'insegnamento della matematica elementare nelle scuole medie, facciamo voti che qualche valente cultore delle discipline geometriche voglia scrivere un'opera per i nostri giovani studenti, dalla quale essi apprendano le costruzioni dei problemi euclidei coi diversi istrumenti di cui si possa fare uso.

Il MASCHERONI in quest'opera, ammirata anche dal non facile ammiratore Steiner, risolve, facendo uso del solo compasso, tutti

i problemi euclidei con ingegnose costruzioni e risolve ancora con grandissima approssimazione diversi problemi di ordine superiore alla Geometria elementare propriamente detta, i quali esigonò l'uso di altre curve oltre la circonferenza.

Se le sue dimostrazioni, con il continuo richiamo alle proposizioni di Euclide, del resto unico testo allora di Geometria elementare, riescano qualche volta pesanti e potrebbero essere oggidì semplificate, le sue costruzioni sono sempre elegantissime e spesso più semplici di quelle che ordinariamente si fanno adoperando e riga e compasso : di ciò il lettore può facilmente persuadersi adoperando p. es. il metodo della *Geomeotrografia del Lemoine* (18) per determinare la semplicità e l'esattezza di una costruzione geometrica. E « non vi « è dotto geometra che anche oggigiorno, dopo quasi un secolo di « avanzamenti in questa scienza, non possa studiare l'opera del « MASCHERONI senza ricavarne buon frutto (19) ».

Il MASCHERONI dedicò il volume a *Bonaparte l'italico* con breve poesia, e a lui lo presentò a Mombello, ove Napoleone, sconfitto il nemico, erasi ritirato il 17 maggio 1797 intento ad ordinare la Republica Cisalpina.

Il giovane Generale, sollecito sempre di far stupire il publico sia nelle piccole che nelle grandi cose, volle egli stesso partecipare le nuove costruzioni geometriche al Laplace e al Lagrange, come leggiamo nel *Moniteur* del 20 Ventoso, an. VI (10 marzo 1798; f. 170 p. 684) in occasione dell'annunzio della traduzione francese di quest'opera fatta da Antonio Michele Carrette : « Les géomètres fran- « çais n'avaient pu se procurer ancore ce savant ouvrage de MA- « SCHERONI, déja cèlebre dans la carrière des sciences mathéma- « tiques par un profond commentaire sur le calcul intégral d'Euler. « Bonaparte le fit connaitre, il y a environ deux mois, á Laplace et « á Lagrange qui conçurent la plus favorable opinion de ce nouveau « genre de géométrie ». Nello stesso giornale è accennata la meraviglia destata l'11 Dicembre 1797 all'Istituto dal Bonaparte, il quale propose a quei matematici alcuni problemi della *Geometria del compasso* e si legge che il Laplace non seppe dare altra risposta che : « Tutto ci aspettavamo da voi, generale fuorchè, lezioni di matematica ».

Il celebre matematico ed astronomo Delambre, segretario perpetuo dell'Istituto francese per la parte delle scienze esatte, nel rapporto generale che fa all'Imperatore Napoleone sui progressi della

matematica dal 1789 al 1808, pur essendo parco lodatore degli stranieri, accennando l'opera del MASCHERONI così si esprime: « La « Geometria antica non ammetteva nelle sue dimostrazioni se non « quello che può eseguirsi mediante la riga ed il compasso. MASCHE- « RONI più severo ancora volle escludere la riga. Vi è certamente « da rimanere grandemente meravigliati del gran numero di nuove « ed acutissime proposizioni ch'Egli ha saputo trovare in un argo- « mento apparentemente esaurito. I suoi principali teoremi erano « stati portati in Francia col Trattato di Campoformio dal vincitore « e pacificatore dell'Italia. Nacque nei dotti francesi il desiderio di « conoscere per intero l'opera di MASCHERONI e ben tosto ne fu « publicata la traduzione ».

La traduzione francese fu fatta, come abbiamo innanzi accennato, dal Carette e publicata a Parigi la prima volta nel 1798 ed una seconda volta nel 1825. Anche in Germania se ne fece una traduzione tedesca dal Güson, publicata a Berlino nel 1825.

La bibliografia della *Geometria del compasso* non è punto ricca. Oltre le due edizioni della traduzione francese e l'edizione della traduzione tedesca dell'opera del MASCHERONI, abbiamo alcuni rimaneggiamenti dell'opera medesima (20) e due note l'una del Dubouis nel *Journal de Math.* (t. XXII, 1892) e l'altra del professore G. Cesàro nelle *Mémoires de la société royale des sciences di Liège*, nelle quali si dimostra la possibilità di risolvere i problemi elementari col solo compasso, ignorando l'opera del MASCHERONI. Abbiamo poi un breve studio dell'Adler (21), il quale dimostra lo stesso mediante il principio della trasformazione per raggi vettori reciproci. Un'applicazione degna di nota del metodo di MASCHERONI è la divisione della circonferenza in 17 parti eguali ottenuta recentemente dal Gérard (22) col solo compasso, divisione che già il Klein diceva *certamente possibile* (23). Non si può quindi dire che « le ricerche compiute dall'autore della *Geometria « del compasso*, abbiano gran che fornito ai geometri occasione di « spingersi a studi ulteriori sull'argomento. È un male, perchè questo « genere di ricerche non solo potrebbe condurre a risultati interes- « santi come curiosità scientifica, ma potrebbe anche rendere un « buon servizio nel campo didattico » (24). Forse a ciò avrà contribuito la rarità dell'edizione dell'opera del MASCHERONI, ed è perciò che siamo stati spinti a ripublicarla.

12. Seguitiamo l'enumerazione delle opere del MASCHERONI.

Notizie generali del nuovo sistema dei pesi e misure dedotte dalla grandezza della Terra (Milano, 1798, in-8°).

Cesare Beccaria fin dal 25 gennaio 1780 avea presentato una relazione al Magistrato Camerale per lo Stato di Milano per la uniformità delle misure di lunghezze, proponendo di dividere le dette misure in frazioni decimali; ma la proposta dell'autore del celebre libro *Dei delitti e delle pene* rimase inascoltata fino a quando il Consiglio legislativo della Republica Cisalpina l'11 marzo 1798 non approvò di eleggere una speciale Commissione per statuire un sistema decimale di pesi, misure e monete analogo a quello della Republica Francese. Fra' Commissari eravi il MASCHERONI, il quale, per rendere accetto al publico il nuovo sistema, spiegandone tutta l'utilità pratica, publicò detto opuscolo, che gli procurò l'onore di essere chiamato fra' delegati della Republica francese e degli Stati alleati o neutri nella Commissione che dovea stabilire le nuove comuni misure; onore ch'Egli pagò con la morte.

13. Nel vol. IX delle *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle scienze,* (Modena, 1802) trovasi inserita un' opera postuma del MASCHERONI dal titolo

Spiegazione popolare della maniera con la quale si regola l'anno sestile o intercalare ed il cominciamento dell'anno Republicano, ch'egli avea mandato il 24 Germinale an. VII (13 aprile 1799) al Serbelloni, ambasciatore della Republica Cisalpina presso la Repubblica Francese.

Di questo studio il Reullier così scrivea al Serbelloni : « Cet ouvrage m'a paru infiniment propre à rendre familieres ces idées naturellement abstraites. Il ne peut á mon avis qu'être très-utile á l'Italie, et faire honneur á son Auteur ».

Morto il MASCHERONI, i numerosi suoi manoscritti esistenti a Parigi furono consegnati al fratello Giuseppe e da questi venduti nel 1819 al dotto bibliofilo avv. Aloisio Fantoni di Rovetta, il quale con venerabile affetto li ordinò, legandoli in volumi. Morto nel 1874 il Fantoni, gli eredi ne proposero la vendita ed il D.r Vincenzo Barca ne facea l'acquisto; morto questi i preziosi volumi passarono alla di lui erede la Signora Chiarina Barca-Albani.

Questi manoscritti furono per invito del Pancaldi, Ministro degli affari esteri della Republica Cisalpina, la prima volta esaminati dal celebre astronomo dell'Osservatorio di Milano ab. Barnaba Oriani, il quale faceva voti che venissero publicati i due studi che contengono un *Trattato sulle misure delle Piramidi triangolari* e una *Memoria sulla integrazione di alcune formole per mezzo delle serie convergenti*, poiché « queste opere servirebbero ad illustrare semprepiù il nome « d'un uomo che onorò la Patria e l'Italia co' suoi talenti » (25).

Il Ravelli nella sua *Bibliografia* fa l'elenco degli scritti di questa grande raccolta, che comprende « ben 38 volumi autografi, parte in foglio, o in-4° od in-8°, » come pure l'elenco di altri autografi del MASCHERONI. Più e più volte furono fatti voti che questi scritti venissero publicati, ma fin'oggi invano, non ostante che l'illustre prof. P. Riccardi nella nota innanzi accennata scrivesse fin dal 1886: « Fra le opere matematiche, ormai secolari, pubblicate da « autori italiani, le quali conservano ancora un assoluto merito scien- « tifico e letterario, ed un pregio bibliografico non comune, sono da « noverarsi quelle del valentissimo geometra LORENZO MASCHERONI ». Ed anche a noi ci sia permesso ancora una volta di far voti che finalmente sia reso al MASCHERONI il meritato tributo di riconoscenza all'opera sua publicando i suoi scritti inediti.

Egli che tanto onorò la patria, ha diritto che i suoi concittadini non lascino in oblio il frutto del suo ingegno.

Parecchie delle opere di matematica del MASCHERONI trovansi citate fra' testi di lingua nel Vocabolario della Crusca e fra esse è inclusa anche la *Geometria del Compasso.*

Pria di finire questi appunti sulle opere matematiche del Mascheroni sentiamo il dovere di rendere sentiti ringraziamenti all'illustre Dottore A. Monti, Professore dell'Ateneo di Pavia, il quale non solo ci fornì dei dati bibliografici, ma gentilmente ci mandò una fotografia del MASCHERONI, dalla quale è presa l'effigie del matematico bergamasco che vedesi in questa ristampa. Questa fotografia è presa dal ritratto dell'Autore che trovasi in fronte all'elogio di Lui scritto dal march. Ferdinando Landi nel 1804 riprodotto ancora nel volume che il prof. Fiammazzo publicò in occasione del primo centenario della morte di LORENZO MASCHERONI.

Prof. Gaetano Fazzari.

NOTE.

(1) Alcuni biografi, fra' quali il Savioli ed il Mangili pongono la nascita del M. il 14 maggio e il 14 marzo, mentre essa avvenne il 13 maggio. Vedi Fiammazzo, *Nel XIV luglio XCM Primo centinario della morte di Lorenzo Mascheroni* [Bergamo 1900, pag. 78].

(2) Il Mascheroni stesso così più tardi scriveva al riguardo: « le filo« sofie si giudicavano, non so perchè, piuttosto perniciose che altro: quindi « parcamente si volevano insegnate in questi ultimi anni: e so che per usare « una vecchia macchina elettrica... il lettore doveva ogni volta che l' avesse « voluta adoperare, presentare una supplica a' suoi superiori. Si era fatta legge « al mio tempo che assolutamente non s'insegnassero le sezioni coniche. Si era « ingiunto di spiegare sempre in latino fino gli elementi di Euclide » [Fiammazzo, l. c., pag. 83].

(3) *Bibliografia mascheroniana ossia catalogo bibliografico delle opere a stampa dell'abbate Lorenzo Mascheroni con un elenco dei suoi manoscritti per* Giuseppe Ravelli [Bergamo, 1881, pag. 81-84].

(4) Christiani Wolfii — *Etementa Matheseos universae;* editio secunda veronensi-Veronae Haeredum Marci Moroni, 1788-1798, vol. 5, in-4.

(5) Così la giudica lo Chasles in una nota a pag. 214 della sua *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie.*

(6) Nell'opera *De subtilitate* [Basilea, 1553], lib. XV, pag. 434-440.

(7) Nel *General trattato di numeri e misure* (Venezia, 1560), 5· parte, libro III.

(8) Nel suo trattato: *Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessario inventorum, una tantum modo circini data apertura* (Venezia, 1553).

(9) Cantor, *Vorlesungen uber Geschicte der Mathematik* [2. Auf., vol. I., 1894, pag. 421 e 700].

(10) Nel suo *Traité des proprietés projectives des figures* [Parigi, 1822].

(11) Nel suo celebre volumetto publicato la prima volta nel 1833, *Die geometrischen Constructionem, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises* (Gesammelte Werke, Berlino, 1881).

(12) *Geométrie de la règle (Correspondance sur l'Ecole polytecnique*, t. II,

pag. 383), ed ancora *Memoire sur l'application de la theorie des transversales* (Parigi, 1822).

(13) *Exercitationum mathematicarum*, liber II. (Lugduno-Batavia, 1656).

(14) *Freie Perspective* (2ª ed. 1773).

(15) *Solutions peu connues de differents problèmes de géometrie pratique* (Parigi 1805).

(16) Sull'argomento veggasi G. de Longchamps, *Essai sur la Geometrie de la règle et de l'equerre* ed inoltre i due articoli 9 e 10 l'uno del professore A. Giacomini, l'altro del prof. G. Castelnuovo nelle *Questioni riguardanti la Geometria elementare, raccolte e coordinate da* F. Enriques (Bologna, 1900).

(17) Per l'uso della riga piatta nelle costruzioni dei problemi geometrici veggasi, oltre l'opera del de Longchamps e l'articolo del prof. A. Giacomini, già citati, l'opuscolo di A. Tummarello, *La Geometria della riga* (Palermo, 1900); la monografia del D.r C. Marenghi, *Geometria della riga a due orli paralleli* (nel *Bollettino di mat. e di scienze fisiche e mat.* an. II, Bologna, 1901) ed ancora la nota di A. Tummarello, *La Parallelometrografia* (nel *Pitagora*, an. VII, Palermo, 1901).

(18) Per questo metodo veggasi la nota del prof. E. Nannei, *La Geometrografia di Lemoine o l'Arte delle costruzioni geometriche (Il Pitagora*, an. IV, 2. sem., 1898).

(19) Queste giudizio leggesi nell'articolo publicato dall'illustre prof. Pietro Riccardi. Per una completa collezione delle opere matematiche di Lorenzo Mascheroni Bollettino di bibliogr. e storia delle scienze mat. e fisica, Roma, (t. XIX, 1886).

(20) Frischauf, *Die geometrischen Constructionen von Mascheroni und Steiner* [Granz; 1869]; Hutt, *Die Mascheroni 'schen Constructionen* (Halle 1880]; E. Daniele, *Sulla risoluzione dei problemi geometri col compasso* [art. 8, nelle *Questioni* ecc. di Enriques].

(21) Adler, *Zur Theorie der Mascheroni 'schen Constructionen* [Wiener Berichte, 99, 1890].

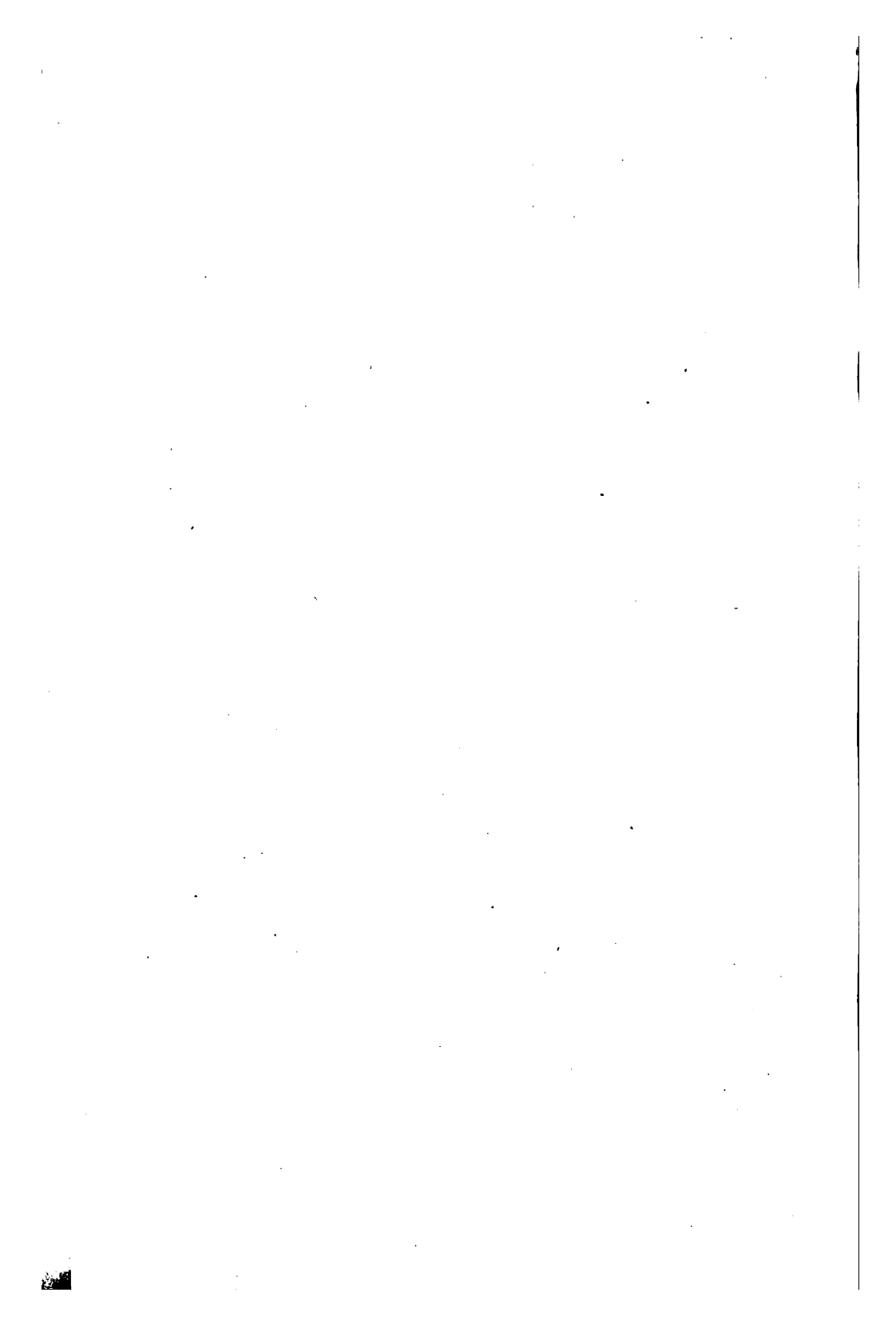
(22) Questa costruzione del Gérard trovasi nei *Math. Annalèn*, 48, 1897. Essa è anche riportata nell'art. di E. Daniele. *Sulle costruzioni dell'ettadecagono regolare* [pag. 411 delle *Questioni* ecc. di Enriques].

(23) Klein, *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare, tradotte dal prof. F. Giudice* [Torino, 1896, nota pag. 29].

(24) E. Daniele, *Sulla risoluzione* ecc. (l. c., pag. 250.

(25) Vedi la lettera dell'Oriani publicata dal Fiammazzo, l. c,, pag. 73, 74.

A BONAPARTE L'ITALICO

Io pur ti vidi coll' invitta mano,
Che parte i regni, e a Vienna intimò pace,
Meco divider con attento guardo
Il curvo giro del fedel compasso.
E te pur vidi aprir le arcane cifre
D' ardui problemi col valor d'antico
Geometra Maestro, e mi sovvenne
Quando l'alpi varcasti Annibal novo
Per liberar tua cara Italia, e tutto
Rapidamente mi passò davanti
L'anno di tue vittorie, anno che splende
Nell'abisso de' secoli qual sole.
Segui l'impresa, e coll' invitta mano
Guida all' Italia tua liberi giorni.

PREFAZIONE

Il primo pensiero, che mi invitò a tentare le strade nuove di questa **Geometria del Compasso,** *fu questo: mentre si trovano tante cose nuove progredendo nelle matematiche, non si potrebbe forse trovare qualche luogo ancora incognito retrocedendo? Finora le più semplici soluzioni della geometria sono state giudicate quelle, che altro non impiegano, che il compasso e la riga; ossia, ciò che è lo stesso, la retta, che è la più semplice tra le linee, e il cerchio, che è la più semplice fra le curve. A questi due stromenti, per così dire, de' problemi, che un tempo determinavano e costituivano la geometria elementare, furono aggiunte in progresso le curve coniche; quindi le superiori al secondo grado e le trascendenti di varie spezie. Si sono continuate ad arricchire queste profonde indagini geometriche coi nuovi soccorsi dell'algebra sì finita, che infinitesima a tale, che ormai que' ritrovati, i quali dapprima parvero maravigliosi agli antichi, e degni de' sagrifizj di Talete e di Pitagora, sono l'appannaggio dei fanciulli dei nostri giorni. Or dissi: non potresti tu ritrocedere dagli elementi, come da una linea di demarcazione, e cercar qualche cosa rimasta addietro a guisa di trascurata? È egli vero che i problemi elementari d'Euclide sieno della più semplice costruzione? O non si potrebbe l'elemento matematico risolvere ne' suoi elementi fondamentali riga e compasso, a guisa di chi ha separata l'acqua in due arie, e qualche aria pure stimata semplice, in due altre sostanze? A questo punto m'avvidi, che non potendosi far uso della riga sola se non per condurre una retta; si poteva però forse far uso del solo compasso non per descrivere solamente un cerchio, o un arco d'esso; ma descrivendone più con più centri, e con diverse aperture, trovare per via delle loro sezioni mutue più punti, che fossero utili, e appunto i cercati di posizione in qualche problema.*

Fin qui conobbi, che questo era un ramo finora non coltivato per nulla dai matematici, e che soluzioni di simil genere ottenute per av-

ventura col solo compasso sarebbero state per la loro costruzione più elementari di ogni altra. Ma due cose mi trattennero per poco di accingermi a tentar nulla per questa via. La prima fu il pensiero: qual pro ne verrà se tu arrivi a trovare col solo compasso que' punti, che altri hanno già finora trovati con esso e colla riga? La seconda era il timore, che da principio sembrommi ben ragionevole, che anzi che avere vantaggio da miei tentativi, fossero pure coronati dall'esito; avrei avuto discapito. Le costruzioni col solo compasso per trovare i punti della geometria elementare sarebbero state complicate a più doppj sopra le già conosciute, nelle quali interviene la riga. Avrebbe dunque la teoria mancato d'eleganza, e la pratica di precisione. Sicchè io era al procinto d'abbandonare l'impresa.

Mentre io era così irresoluto, m' accadde di rileggere la maniera colla quale Graham *e* Bird *dividevano in Inghilterra i loro grandi quadranti astronomici* (Encyclop. Method. Articl. quart de cercle mural). *Il quadrante di* Graham *fatto da lui per Greenwich non solo si dice aver servito di modello alla maggior parte di quelli che si sono fatti dopo; ma vien considerato ancora per la sua precisione dagli astronomi per uno de' migliori, che siansi mai adoperati nell' astronomia, fino all'epoca dei quadranti di* Ramsden. *Ora vidi che la divisione di quella celebre macchina, abbandonata affatto la riga, fu eseguita col solo compasso. È interessante la descrizione del metodo impiegato in quella lunga ed ingegnosa operazione. Io non entrerò qui a dire le ragioni, per le quali la riga ne fu esclusa. Le indovineranno facilmente tutti quelli, che hanno perizia di simil genere di lavori. Per accennare in generale i vantaggi, che ha il compasso sopra la riga, qualora si tratti di una descrizione precisa di linee, che non debbano temere l'esame del microscopio, basta avvertire, che trattandosi specialmente d'una riga alquanto lunga, è quasi impossibile ch' ella sia così diritta, che ne garantisca per tutto il suo tratto della posizione a luogo de' punti, che in essa sono. E sia pur essa rettissima. Sanno i pratici, che il dovere strisciare lungo essa colla punta che segna, porta seco una incertezza di parallelismo nel moto dell' asse di questa punta, o di perfetto adattamento allo spigolo, che rende spesso inutile la sua massima perfezione. A queste due difficoltà non va soggetto il compasso. Qualora esso sia fermo nell'apertura, e finissimo nelle punte; centratane una immobilmente, il che non è difficile, l' altra scorrendo segna da sè un arco così preciso ed esatto, che nulla più.*

Nel leggere quella descrizione avvertii, che GRAHAM *ebbe quattro incomodi. Il primo fu, che dovette operare per via di tentativi. Prescindendo dall' arco di sessanta gradi, che fu da lui determinato col raggio del cerchio; tutte le sue soddivisioni furono eseguite tentando. Gli Antichi non hanno somministrato mezzo di dividere la circonferenza di un cerchio col solo compasso, altro che in sei; questo viene esposto e dimostrato nella proposizione decimaquinta del libro quarto d' Euclide. Non potè dunque* GRAHAM *ottenere precisione geometrica, fuorchè in un punto.*

Il secondo incomodo fu la perdita di tempo, che necessariamente si consuma anche dai più abili nei tentativi.

Il terzo fu l'aver dovuto impiegare due piani; uno, sul quale fare le prove; l' altro, sul quale trasportarne i risultati, che era lo stesso piano del quadrante. Ciò si fece da lui per non guastare colle prove sul quadrante la superficie del lembo.

Il quarto fu l'aver dovuto eseguire due divisioni di diverse specie. Siccome la divisione del quadrante in novanta gradi portava seco le soddivisioni di un arco in tre, e in cinque parti, e i tentativi di queste soddivisioni riuscivano imperfetti per la troppa accumulazione di errori; si volle da lui eseguire un' altra divisione del quadrante stesso accanto alla prima, la quale non procedesse, che per via di bissezioni. Diviso dunque l'arco di sassanta gradi in due parti, ed avuto l' arco di trenta, e quindi il quadrante diviso in tre parti; colle soddivisioni per due si ebbe in seguito la sesta, quindi la duodecima parte ecc. fino a che tutto il quadrante restò diviso in parti novantasei. Essendo questa la divisione, che meritava più fiducia; l' altra divisione in novanta gradi, che era pur quella, che doveva immediatamente servire agli Astronomi, si confrontò, e si corresse sopra questa via d' una tavola calcolata all'uopo.

Tutti questi inconvenienti furono forse la cagione, per la quale BIRD *si appigliò ad un altro metodo per dividere i suoi quadranti. Egli determinava gli archi per via delle loro corde, che prendeva sopra una scala di parti eguali. Ma nemmeno questa seconda maniera è libera d' imperfezioni; poichè in primo luogo manca di precisione geometrica; ed in secondo luogo trasporta sul quadrante le inesattezze, che trovar si potessero nella scala.*

La considerazione dell' importanza degl'istromenti astronomici mi richiamò la mente a guardare il mio progetto della **Geometria del Com-**

passo *sotto un punto di vista più favorevole. Cominciai a credere, che avrei fatto molto, se avessi potuto dividere la circonferenza col solo compasso in più parti, che in sei. Quanto più avanti avessi potuto spingere la soddivisione, e quanto più questa fosse stata concorde colla divisione del quadrante in novanta gradi; tanto maggior servizio avrei prestato agli artefici d' astronomia. Avrei procurato loro la precisione geometrica; avrei risparmiato loro il tempo de' tentativi, il doppio genere di divisioni, la necessità di due piani, e l'uso non affatto sicuro, e non geometrico delle scale.*

Mi restava solo il timore, che anche trovandosi per avventura questo nuovo metodo, non riuscisse poi complicato, e lungo a segno di non essere più abbastanza opportuno per l' uso. M' accinsi all' opera. Vedendo, che l'applicazione dell'algebra alla geometria non m'assistiva molto in simil genere di ricerche, m' aggirai per altre strade quasi semplicemente geometriche, che io qui indicherei se giovasse; ma siccome io non ho tenuto gran fatto una traccia costante nel mio cammino, e devo molto all'accidente, che dopo varj andirivieni di ripieghi diversi, m'ha presentato, e non sempre così prontamente il risultato ch'io bramava, così non ne dirò nulla. Forse altri potrà speculare un filo in questa dottrina, che conduca per ordine da un problema all' altro, e che se si fosse scoperto da principio, avrebbe facilitata ed abbreviata l'invenzione.

Il primo saggio della mia riuscita l' indirizzai due anni fa con una lettera inserita nel Giornale Brugnatelli *all' eccellente artista il cittadino* ANNIBALE BECCARIA, *allora patrizio milanese, ed ora municipalista e socio dell'istruzione pubblica, il quale all' esser fratello del celeberrimo autore de'* Delitti e delle Pene *aggiunge la gloria vera e propria d' eseguire, qualor gli piaccia, finissimi stromenti di matematica. Quel mio saggio consisteva nel metodo di dividere la circonferenza in ventiquattro parti coll' ajuto d' un solo punto preso fuori di essa. La costruzione di questa divisione è la più semplice, che si possa sperare, e l' ho ritenuta; l'altra in cento venti, che vi esposi, era troppo complicata; ora ne ho trovata una molto più breve, e tale, che la credo la brevissima. V' aggiunsi una spedita costruzione per avere le radici quadrate dall' uno sino alle dieci, che ho pur qui ritenuta. Gli altri problemi esposti in quella lettera siccome complicati, o di poca approssimazione, qui sono omessi.*

Ora io sono giunto, come si vedrà dal libro, a dividere pronta-

mente la circonferenza in dugento quaranta parti con esattezza geometrica per via del solo compasso e non adoperando altro che tre punti presi fuori della circonferenza stessa. Ciascuna di queste parti riesce di un grado e mezzo della divisione usata fin qui in gradi trecento sessanta. Divido, qualora piaccia, ogni arco in due. Ciò geometricamente. Per via di approssimazione divido la circonferenza col solo mezzo di quei tali tre punti in gradi e quarti di gradi senza l' errore d'una sesta parte di minuto secondo. Cogli stessi tre punti divido pure in minuti primi stando sempre al di sotto dell'error d'un secondo. Che di questa precisione possano essere contenti gli astronomi, mi ha lusingato a crederlo il leggere, che nemmeno gli artisti più celebri sieno passati oltre.

Ma non mi sembrava aver fatto abbastanza se non serviva colle mie teorie anche alla nuova divisione del cerchio. È noto che i Francesi felici di avere nel seno della loro repubblica geometri primi nell' universo, secondando i loro consigli, hanno finalmente appagato i lunghi desiderj dei dotti col sanzionare in tutte le arti la sola divisione decimale. Questa divisione forse lentamente in altre provincie per l'urto dei pregiudizj, e più per la riazione dell' inerzia, ma invincibilmente col tempo prenderà piede dovunque abbia luogo qualche amore alle scienze, o un ben inteso interesse di commercio. Una delle divisioni, che dovevano riuscire più difficili ad alterarsi era quella della circonferenza del cerchio tra per l'antichità della divisione in 360, e soddivisione in 60 ricevuta dalle nazioni tutte; e per la fatica necessaria a rifar le tavole trigonometriche in qualunque nuovo sistema. Ma l'energia d'una grande nazione che si rigenera, ha vinto tutto. Fissate quattrocento parti, o gradi nella circonferenza, acciò il quadrante, che è il fondamento della trigonometria, resti diviso in cento, e ciascuna di queste centesime suddivisa in cento, e così via via; si sono già calcolate e stampate le tavole dei seni naturali, e artifiziali di quelle; e perchè nulla manchi ad assicurare, ed accrescere la precisione de' numeri, cospirò la nuova scoperta de' Francesi di stampare con caratteri saldati in piombo; e si han già tra mano queste nuove tavole di tale edizione chiamata stereotipa eseguita da Firmino Didot. *Più: se n'aspettano altre copiosissime con gran numero di decimali, che si stanno preparando sotto la direzione del celebre* Prony *da una moltitudine di attivissimi calcolatori. Tutto ciò mi spinse a cercare un metodo almeno d'approssimazione per dividere la circonferenza in tali nuovi*

gradi e minuti, e m' è riuscito col ministero di que' soli tre punti d' avere con abbastanza pochi giri di compasso questi gradi e minuti centesimali senza il piccolo error d'un secondo.

Se null' altro si fosse fatto, si sarebbe non ostante raccomandato abbastanza il maneggio del puro compasso. Ma strada facendo ho trovato non esserci problema di geometria elementare, che col compasso solo non si potesse risolvere; in questo senso cioè di trovar tutti quei punti, che si richieggono nel problema per la posizione e determinazione delle rette, che v'abbisognano. Questo interessava la teoria. Ho voluto esaurire l' argomento; dare tutti gli elementi a tal uopo, e dimostrare che tutti i punti che Euclide o altri elementaristi trovano col sussidio del compasso e della riga congiunti; col solo primo stromento trovar si possono.

Non tutti i problemi elementari sciolti col solo compasso hanno un'abbastanza semplice costruzione. Ardisco però dire che la maggior parte dei più necessarj son brevi e succinti a segno, che chi vorrà risolverli nella pratica, troverà meglio servirsi del sol compasso per trovarne i punti fondamentali, ripudiando la riga; le vie che propongo nel libro giustificheranno quanto dico.

Io non indicherò qui tutti que' Problemi di simil genere, che mi sembrano di qualche importanza. Eccone non ostante alcuni. Se si vorrà trovare col compasso solo il centro d' un cerchio; si avrà con pochi tratti speditamente. Egualmente si avranno le terze, e le quarte proporzionali; non dico le medie. Chi vorrà costruire poligoni regolari non solo entro o intorno a cerchj dati, ma sopra basi date; ne avrà il mezzo facile nel compasso (1). *Chi vorrà trovare radici quadrate di numeri, cioè duplicare, o moltiplicare comunque di area quadrati, o cerchi, o figure simili di qualunque specie; lo farà presto per via del compasso. E tutto ciò con geometrica precisione; essendone capace la natura di tali problemi. Per approssimazione poi chi vorrà avere una lunghezza eguale alla circonferenza d'un cerchio, o un arco eguale al raggio, o un quadrato eguale ad un cerchio, o un cerchio eguale ad un quadrato, o un cubo eguale ad una sfera, o una sfera eguale ad un cubo, o un cubo doppio d'un altro, o triplo, o quadruplo; potrallo avere impiegando sezioni d'archi, ossia determinando sempre non con*

---

(1) **Gli architetti militari vi troveranno forse molte cose a proposito degli usi loro.**

altro che col compasso la lunghezza di que' lati o di quei raggi, che abbisognano alle richieste figure.

Ecco in breve quanto forma la **Geometria del Compasso,** *che presento al pubblico. Quanto alle dimostrazioni, ho studiato di farle geometriche all' antica. Questo m' è parso più proprio della natura de' miei problemi, e più breve. Dovunque geometricamente erano per riuscir troppo lunghe, ho scorciato il cammino col calcolarlo. Ho dunque servito ad un tempo alla brevità, alla chiarezza, ed all'eleganza quanto ho potuto farlo. Ho citato Euclide il gran maestro degli elementi. Dove occorrono proporzioni, i numeri delle proposizioni ch'io cito, son quelli del* TACQUET. *La ragione di ciò è, che questo libro è più nelle mani di tutti, che l'antico testo d' Euclide. Ho posti in carattere più grande i paragrafi, che serviranno maggiormente agli artisti. Chi ne vuole la dimostrazione, deve leggere tutto il libro. Chi non vuole che la parte pratica, potrà omettere quanto è stampato in minor carattere. Ciò lo faranno gli artisti; lo farà chi non vuole che divertirsi col compasso.* (1) *A questo genere di divertimento ho assegnati molti problemi tratti da* PAPPO, *dall'*OZANAM, *dal* SIMPSON *e da altri, che ho messi nel libro undecimo. Ecco tutto ciò che io aveva a dire a' miei lettori sopra questa* **Geometria del Compasso**, *che loro presento, la quale per la costruzione de' suoi problemi è la più semplice e la più elementare geometria che aver si possa; e che da nissuno finora, ch'io sappia, s'era toccata.*

---

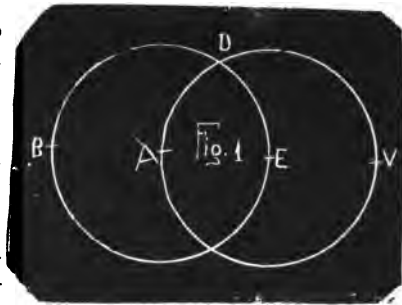
(1) Essendo lo scopo di questa ristampa principalmente didattico, abbiamo creduto di non fare nel testo la detta distinzione, e tutto il libro è perciò stampato in un unico corpo di carattere.

Nota dell'Editore

LIBRO PRIMO

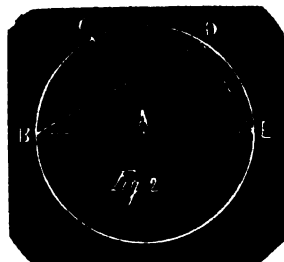
PRELIMINARE

1. Chiamo *Geometria del Compasso* quella, che per via del solo compasso senza la riga determina la posizione dei punti.

Dati per esempio due punti A ed E (fig. 1); se si cerchi il terzo D, che sia tanto lontano da ciascuno di essi, quanto essi lo sono tra loro; si descrivano coll'intervallo, ossia raggio AE, e coi centri A, ed E i due cerchj EDB, ADV, che si tagliano nel punto D; questo punto sarà il cercato; poichè sarà lontano dai punti A, ed E d'un intervallo eguale ad AE (Prop. 1, lib. I Eucl.). Questo punto D si è trovato col solo compasso senza la riga.

2. Può accadere che la posizione di un punto si trovi col solo compasso; ma per dimostrare la proposizione ci sia bisogno di costruire la figura col mezzo della riga.

Se per esempio, dati due punti A e B, che sieno lontani

tra loro d'un certo intervallo, che si prende per l'unità, ossia si fa = 1; si cerchi un punto D, che sia lontano da B dell'intervallo $BD=\sqrt{3}$; la soluzione del Problema sarà come segue.

Col centro A, (fig. 2) raggio AB si descriva il cerchio BCD. Collo stesso raggio, centro B si descriva un arco, che tagli la circonferenza in C. Di nuovo collo stesso raggio, centro C si descriva un arco, che tagli la circonferenza più oltre in D. Sarà questo il punto cercato, e trovato senza la riga.

Per dimostrare nondimeno, che sia l' intervallo $BD=\sqrt{3}$, vi sarà d' uopo di linee rette, le quali si segnano colla riga. Sia BE il diametro del cerchio BCD, e si guidino le rette BD, DE. Sarà il triangolo BDE rettangolo in D (31, lib. III). Sarà dunque il quadrato della BE eguale alla somma de' due quadrati delle rette BD e DE (47, lib. I); e però il quadrato della BD sarà eguale alla diffesenza de' quadrati della BE e della DE. Ma essendo l'intervallo $BC=CD=AB$; sarà ancora $DE=AB$ (15, lib. IV), ossia $DE=1$. È ancora $BE=2$. Sarà dunque $(BD)^2$, cioè il quadrato della BD, eguale a $4-1=3$; e però la sua radice $BD=\sqrt{3}$. Il che era da dimostrarsi, e non si è potuto fare senza la riga. Questa proposizione è la 12 del lib. XIII d' Euclide.

3. Dalla definizione di questa *Geometria del Compasso* (§ 1) è chiaro, che appartengono ad essa tutti i Problemi, che si possono sciogliere col compasso solo, benchè per esso solo non si possano dimostrare; com'è il Problema precedente (§ 2).

4. L' uso di questa *Geometria* sarà grandissimo, come apparirà dagli esempj, nel trovare i punti in pratica colla maggior precisione possibile, e spesso molto più speditamente col solo compasso, che chiamando in soccorso anche la riga.

5. Sarà dunque nostro ufizio sciogliere i Problemi col solo compasso; sarà poi lecito servirsi di dimostrazioni costruite secondo l'uso col compasso e colla riga, al qual fine citeremo le proposizioni e i libri d' Euclide.

6. Così poi verremo a capo di questo trattato, che non

abbia a mancare alcun elemento, perchè col solo compasso si possano determinare tutti que' punti di qualsivoglia Problema, che fino adesso col cerchio e colla riga solevansi determinare.

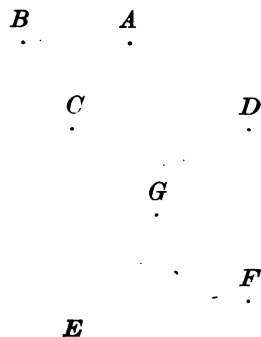
7. Non pertanto noi non porremo qui tutti questi Problemi; ma dimostrati gli elementi necessarj e bastanti per tutti, tra essi sceglieremo un buon numero de' principali, cioè tutti quelli, che ci sembreranno i più utili, o per una certa eleganza pregevoli.

8. Aggiungeremo qui in favore degli artisti, in grazia de' quali in gran parte quest'opera è stata scritta, che sapendo essi la molestia e il pericolo d'errare, che nasce dall'allargare e stringere il compasso a varie aperture precise; noi procureremo di sciogliere i Problemi col minimo numero possibile di aperture di compasso. Sarà poi anche meglio per l'artista avere in pronto tanti compassi *fedeli*, come li chiamano, ossia tali, che uno si possa assicurare, che conservino appunto l'apertura data; quante sono le aperture, che richiede la soluzione del Problema. Poichè accaderà spesso, che dovremo adoperar più volte la stessa apertura dopo averne adoperata una o più altre; così senza allargare o stringere un sol compasso, ripiglieremo quell'altro compasso messo da parte, che la conserva. A questo fine alcune volte chiameremo col nome di compasso primo, secondo, terzo le aperture successive, colle quali verrà sciolto il Problema.

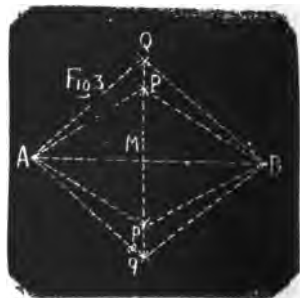
9. Essendo oltre ciò importante alla precisione pratica della posizione di un punto, che la sezione delle linee, che lo determinano, si faccia ad angoli retti o vicini al retto; faremo sempre in modo, che un arco tagli l'altro o ad angoli retti, se ciò ne riuscirà, o almeno ad angoli non molto lontani dal retto.

10. Per essere più brevi, senza però riuscire oscuri, nello indicare le costruzioni delle figure adopreremo spesso alcuni compendj, che saranno tosto intesi al solo guardar la figura. Per esempio nella fig. 2 in luogo di dire: *col raggio AB, e col centro B si descriva un arco, che tagli la circonferenza BCD nel punto C. Poi collo stesso raggio, e col centro C si descriva un arco, che tagli la stessa circonferenza in D ecc.;* diremo solamente: *si faccia ad* $AB=BC=CD$, ecc. Poichè è abbastanza chiaro, che i punti B, C, D, coi quali si indica la stessa circonferenza

BCD sono nella stessa; cosicchè non v' è alcun pericolo d' equivoco.

11. Istessamente dati per esempio tre intervalli AB, CD, EF; se dirò: *si faccia a* $CD = EG$; *ad* $AB = FG$; si dovrà intendere che dica: *col raggio* CD, *e col centro* E *si descriva un cerchio, nella cui circonferenza sia il punto* G. *Quindi coll'intervallo* AB, *e col centro* F *si descriva un altro cerchio, che tagli il primo nel punto* G.

12. Alle volte nelle dimostrazioni nomineremo alcune linee rette, che non saranno nella figura, nominando i due punti estremi, ai quali dovrebbero esser condotte; come se nella figura del § 11, nominassi la retta AB, ovvero CD. Ciò faremo quando non vi sarà pericolo d'oscurità, per conservar nitida la figura, e lasciare apparire meglio la costruzione fatta col solo cerchio.

13. *Lemma.* Se co' due centri A, e B, e co' raggi AP ed AQ si descrivano degli archi, che si tagliano in P e p; Q e q; i punti Q, P, p, q saranno nella stessa retta (fig. 3).

Dim. Essendo per costruzione eguali rispettivamente tra loro tutti i lati de' triangoli APp, BPp; l'angolo APp sarà eguale all' angolo BPp (8, lib. I). Per la stessa si dimostra essere $APQ = BPQ$. Dunque la somma de' due APp, APQ è eguale alla somma de' due BPp, BPQ. Ma la somma di questi quattro angoli è eguale a quattro retti (13, lib. I, Coroll.). Dunque ciascuna delle somme di due eguali equivale a due retti. Dunque la QPp è retta (14, lib. I). Nella stessa maniera si dimostra, che è retta la Ppq. Dunque i punti Q, P, p, q sono nella stessa retta.

14. Stanti le stesse cose del § 13, le rette AB, Pp, così AB,

Qq si bipartiranno egualmente in M ad angoli retti, e le QP, qp saranno eguali.

Dim. Poichè per l' eguaglianza de' lati de' due triangoli APB, ApB si ha l'angolo $PAB=pAB$ (8, lib. I). Ma è ancora $APp=ApP$ (5, lib. I). Dunque anche $AMP=AMp$ (Cor. Prop. 32, lib. I). Dunque entrambi retti (13, lib. I). E sarà Pp bipartita in M per la dimostrazione della Prop. 10, lib. I. Nella stessa maniera si dimostrerà, che si bipartono in M la Qq e la AB. Dalle eguali poi QM, e qM togliendo le eguali PM, pM; i residui QP, qp saranno eguali.

15. *Cor.* Sarà dunque $(QM)^2=(AQ)^2-(AM)^2$ (47, lib. I).

16. *Lemma.* Stanti le stesse cose del § 13, sarà $(AQ)^2 = =(AP)^2+(PQ)^2+Pp\,.\,PQ$.

Dim. Poichè è $(AQ)^2=(AP)^2+(PQ)^2+2MP.PQ$ (12, lib. II). Ma è $2MP=Pp$ (§ 14). Dunque ecc.

17. *Lemma.* Sarà pure $(AQ)^2=(Ap)^2+(pQ)^2-pP\,.\,pQ$.

Dim. Poichè è $(AQ)^2=(Ap)^2+(pQ)^2-2pM\,.\,pQ$ (13, lib. II). Ma è $2pM=pP$ (§ 14). Dunque ecc.

18. *Cor. I.* Essendo $pQ=pP+PQ$; sarà $(pQ)^2=pP\,.\,pQ+ +PQ\,.\,pQ$ (2, lib. II); quindi sottraendo $pP\,.\,pQ$ si ha $(pQ)^2- -pP\,.\,pQ=PQ\,.\,pQ$. E fatta la sostituzione di questo valore nel valore di $(AQ)^2$ del § 17, si avrà $(AQ)^2=(Ap)^2+pQ\,.\,PQ$. Donde sottraendo di qua e di là $(Ap)^2$, nasce $(AQ)^2-(Ap)^2=pQ\,.\,PQ$. Se ora si eseguisca la moltiplicazione di $AQ+Ap$ per $AQ-Ap$; si troverà $(AQ+Ap)\,(AQ-Ap)=(AQ)^2-(Ap)^2$. Quindi si avrà $(AQ+Ap)\,(AQ-Ap)=pQ.\;PQ$. Donde per la 16, lib. VI si deduce l'analogia

$$pQ : AQ+Ap :: AQ-Ap : PQ,$$

ossia sostituendo AP in luogo di Ap, e invertendo alternativamente

$$PQ : AQ+AP :: AQ-AP : pQ$$

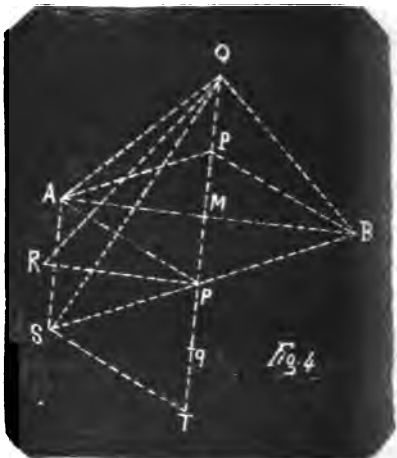
Da queste due analogie vien espresso il celebre.

Teor. In qualunque triangolo un lato qualunque stà alla somma degli altri due, come la loro differenza stà alla differenza o alla somma de' segmenti, che fa su quel lato la perpendicolare condotta dall'angolo opposto, secondo che essa cade dentro o fuori del triangolo.

19. *Cor. II.* Se sarà $AQ=pQ$; tolti di qua e di là i due

termini eguali $(AQ)^2$, $(pQ)^2$, e aggiungendo d' ambe le parti $pP \cdot pQ$; risulterà $pP \cdot pQ = (Ap)^2$.

20. ***Lemma***. Stanti le stesse cose (§ 13), se sia retto l'angolo RpQ; sia poi l'angolo $RpS = RpA$; e $pS = pR = pA$; sarà AS parallela ed eguale alla Pp; e sarà $(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS . pQ$.

Dim. Poichè se dai due angoli retti RpQ, Rpq (fig. 4) si sottraggono i due eguali RpA, RpS; rimarranno eguali gli angoli ApP, Spq. Ma $ApP = APp$ (5, lib. I). Dunque $Spq = APq$. Dunque AP, Sp sono parallele (29, lib. I). Ma sono anche eguali per costruzione. Dunque le due AS, Pp sono eguali e parallele (33, lib. I).

Si ha poi $(RQ)^2 = (Rp)^2 + (pQ)^2$ (47, lib. I) $= (Ap)^2 + (pQ)^2$. E pel Lemma § 17, $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP \cdot pQ$. Dunque $(AQ)^2 = (RQ)^2 - pP \cdot pQ$, ossia $= (RQ)^2 - AS \cdot pQ$.

21. ***Lemma***. Stanti le stesse cose (§§ 13 e 20) sarà $(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS \cdot pQ$ (fig. 4).

Dim. Poichè se si faccia $ST = Sp$; $pT = pP$ (§ 1); nei due triangoli SpT, APp si troveranno tra loro eguali gli angoli SpT, APp (8, lib. I); e però PpT retta (27, lib. I). Sarà poi $(SQ)^2 = (pS)^2 + (pQ)^2 + pQ \cdot pT$ (§ 16). Ma è $(pS)^2 + (pQ)^2 = (pR)^2 + (pQ)^2 = (RQ)^2$; ed è $pT = pP = AS$. Dunque $(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS \cdot pQ$.

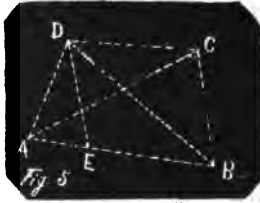
Dai due Lemmi precedenti segue per Corollario essere $(AQ)^2 + (SQ)^2 = 2(RQ)^2$.

22. ***Lemma***. Se sarà $AQ = pQ = BQ$ (fig. 4); e $Ap = pB = pS$, essendo pS sulla continuazione della Bp; sarà $AS \cdot pQ = (Ap)^2$.

Dim. Avendo i triangoli isosceli AQp, BQp i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $QpA = QpB$ (8, lib. I). Sarà poi l'angolo ApB, che è la somma dei due, eguale anche alla somma de' due angoli SAp, ASp (32, lib. I), i quali essendo eguali

tra loro per essere isoscele il triangolo ApS (5, lib. I); sarà ciascuno d'essi eguale all' angolo $ApQ=pAQ$ (5, lib. I). Sarà dunque il triangolo pAS simile al triangolo QpA (32, lib. I, 4, lib. VI); e quindi $pQ : Ap :: Ap : AS$, e $AS . pQ = (Ap)^2$ (17, lib. VI).

23. *Lemma.* Se si $AB=AC=BD$; e $AD=BC$; sarà (fig. 5) $DC. AB=(AB)^2-(AD)^2$.

Dim. I due triangoli ADB, ACB; avendo i lati rispettivamente eguali, saranno eguali (8 e 26, libr. I). Essendo poi posti tutti e due sulla stessa base AB; saranno fra le stesse parallele DC, AB (39, lib. I). Se dunque sulla BA si prende $BE = DC$; sarà DE uguale e parallela alla BC (33, lib. I), e uguale ancora alla DA. Quindi i due triangoli isosceli BDA, DAE, che hanno un angolo comune in A, saranno simili (5 e 32, lib. I, e 4, lib. 6.), e sarà $AB : AD :: AD : AE$; quindi $AB. AE = (AD)^2$ (17, lib. VI). Si ha poi $AB. AE+AB. BE=(AB)^2$ (2, lib. II). Quindi ad $AB. AE$ sostituendo $(AD)^2$, e a BE sostituendo DC; si ha $(AD)^2+AB. DC=(AB)^2$. E sottraendo $(AD)^2$, si avrà $DC. AB=(AB)^2-(AD)^2$.

24. *Lemma.* Se nel cerchio $B \mu G$ al raggio AB si alzi nel centro A la normale Ae eguale alla corda BG dell'arco $B \mu G$; e fatto centro in e col raggio AB si descriva un arco, che tagli la circonferenza in μ; sarà l' arco $B \mu$ eguale alla metà dell'arco $B \mu G$.

Dim. Per l'eguaglianza de' lati de' due triangoli ABG, $A\mu e$ (fig. 6) è l'angolo $GAB=A\mu e$ (8, lib. I). Si divida per metà l'angolo $A\mu e$ colla retta μM; essendo isoscele il triangolo μeA, l'angolo $\mu eM = \mu AM$; quindi nei due triangoli μeM, μAM, essendo eguali tra loro gli altri due angoli, sarà anche $\mu Me=\mu MA$ (Coroll. 32, lib. I); quindi μM normale alla Ae (13, lib. I), e quindi parallela alla AB (29, lib. I), e sarà l'angola $M\mu A=\mu AB$ (27, lib. I), sarà dunque μAB la metà dell'angolo GAB, e però anche l'arco $B\mu$ metà dell'arco $B\mu G$.

25. Se nel parallelogrammo $ABMN$ sarà la diagonale MA eguale ai lati opposti MB, AN; sarà il quadrato dell'altra diagonale BN eguale al quadrato della prima aggiuntivi i due quadrati degli altri due lati.

Fig 7

Dim. Si divida AB per metà in m (fig. 7) colla perpendicolare Mm (10, 11, lib. I), e sopra la BA continuata si prenda $An = Bm$; sarà $mn = BA = MN$; e però $MNnm$ parallelogrammo (33, lib. I), e sarà retto l'angolo $N\ n\ B$ (27, lib. I). Quindi $(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2 + 2AB.\ An$ (12, lib. II). Ma $An = \frac{1}{2} AB$. Dunque $(NB)^2 = (AN)^2 + 2\,(AB)^2 = (AN)^2 + (AB)^2 + (MN)^2$.

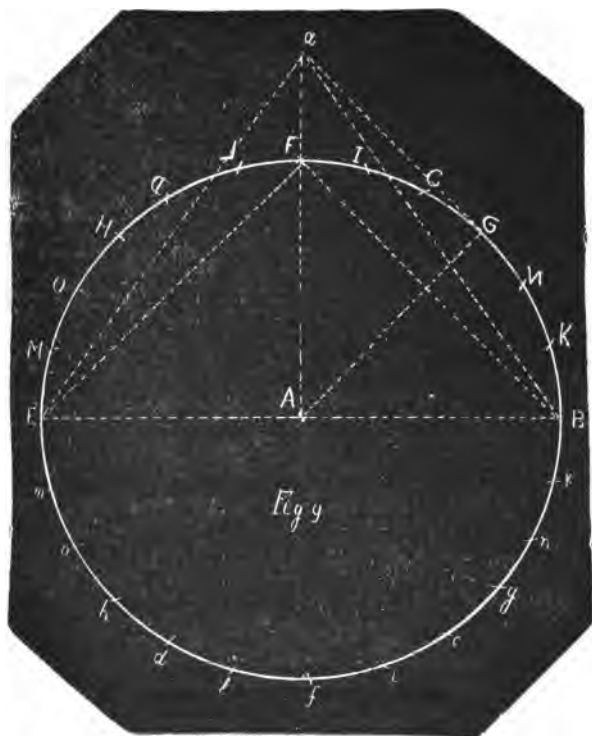
26. Se in qualunque triangolo BPE si tagli in due egualmente la base $B\ E$ in A, e dall'angolo opposto P si guidi la PA (fig. 8); sarà la somma de' quadrati dei lati BP e PE eguale alla somma de' quadrati eguali dei due segmenti, aggiuntovi il doppio quadrato della AP.

Fig 8

Dim. Poichè se si cali il perpendicolo PR sulla base BE; sara $(BP)^2 = (BA)^2 + (AP)^2 + 2\ BA.\ AR$ (12, lib. II). Sarà pure $(PE)^2 = (AE)^2 + (AP)^2 - 2\ AE.\ AR$ (13, lib. II). Fatta dunque la somma dei valori dei due quadrati $(BP)^2$ e $(PE)^2$, essendo $BA = AE$; sarà $(BP)^2 + (P\ E)^2 = (BA)^2 + (AE)^2 + 2\,(AP)^2 = 2\,(AB)^2 + 2\,(AP)^2$.

LIBRO SECONDO

DELLA DIVISIONE DELLA CIRCONFERENZA E DEGLI ARCHI DEL CERCHIO.

27. *Prob.* Dividere la circonferenza del cerchio BDd in quattro parti eguali (fig. 9).

Sol. Nella stessa circonferenza di faccia al raggio $AB=Bc=BC=CD=DE=Ed$ col primo compasso (§ 10, 8). Sarà $dc=$

$cB=BA$ (15, lib. IV). Si faccia a $BD=Ba=Ea$ col 2° compasso; ad $Aa=BF=Bf$ col 3° compasso. Si avrà divisa la circonferenza in quattro parti eguali BF, FE, Ff, fB.

Dim. Essendo BAE un diametro (15, lib. IV); e avendo i triangoli aAB, aAE tutti i lati eguali, e però eguali gli angoli aAB, aAE (8, lib. I); questi saranno retti (13, lib. I). Dunque $(aB)^2=(AB)^2+(aA)^2$ (47, lib. I); e sottraendo $(AB)^2$ da tutte due le parti, si ha $(aB)^2-(AB)^2=(aA)^2$. Si faccia per brevità $AB=1$; sarà $(aB)^2=(BD)^2=3$ (§ 2). Sarà dunque $(aA)^2=3-1=2$, e quindi anche $(BF)^2=(aA)^2=2=1+1=(AB)^2+(AF^2)$. Dunque nel triangolo FAB l'angolo FAB sarà retto (48, lib. I), e però anche l'angolo FAE (13, lib. I). Saranno dunque gli archi BF, FE eguali tra loro, e quarti di cerchio, come pure gli archi Bf, fE.

28. *Cor.* Essendo retti gli angoli BAa, BAF; i tre punti A, F, a saranno nella stessa retta.

29. Abbiamo dunque già la circonferenza divisa in due parti eguali per esempio nei punti B ed E; in tre parti, come ne' punti B, D, d (15, lib. IV); in quattro parti ne' punti B, F, E, f (§ 27); in sei parti nei punti B, C, D, E, d, c. (15, lib. IV).

30. *Prob.* Dividere una circonferenza in otto parti eguali.

Sol. Stanti le cose come al § 27. (fig. 9), si faccia ad $AB=aG=aH$ compasso 1°, ad $Aa=Gg=Hh$ compasso 3°; sarà anche ad $Aa=gh$; e la circonferenza sarà divisa in otto parti eguali ne' punti B, G, F, H, E, h, f, g.

Dim. Poichè essendo $(Aa)^2=2$ (§ 27); sarà $(Aa)^2=(AG)^2+(aG)^2$. Sarà dunque retto l'angolo aGA (48, lib. I). Quindi pel triangolo isoscele aGA gli altri due angoli GAa, GaA tra loro eguali (5, lib. I) saranno semiretti (32, lib. I). Dunque l'angolo GAF, che è lo stesso coll'angolo GAa (§ 28), sarà la metà di BAF. Dunque anche l'arco $GF=BG$. Ma per costruzione è $Gg=BF$ (26, lib. III). Dunque tolto di qua e di là BG; sarà $GF=Bg$. Nello stesso modo si dimostrerà, che gli altri archi sono eguali. Sarà dunque la circonferenza divisa in parti eguali ciascuna alla metà del quadrante, e però in otto.

31. *Prob.* Dividere la circonferenza in dodici parti eguali.

Sol. Stanti le cose come nel § 27 (fig. 9), si faccia ad AB

$= FN = Nn = FO = Oo$. Sarà la circonferenza divisa in dodici parti eguali ne' punti B, N, C, F, D, O, E, o, d, f, c, n.

Dim. Poichè tolti via gli archi eguali BC, DE dagli eguali BF, FE; gli archi, che rimangono CF, FD saranno eguali. Essendo dunque CD la sesta parte della circonferenza (§ 29); sarà CF la sua metà, cioè la duodecima. Sarà ancora $CF = CN$ a cagione di $FN = CD$; così pure $CN = NB$ a cagione di $FN = CB$. E nella stessa guisa si dimostrerà, che tutte le altre sono duodecime parti della circonferenza.

32. *Prob.* Dividere la stessa circonferenza in ventiquattro parti eguali.

Sol. Stanti le stesse cose come sopra (fig. 9) (§ 30 e 31); si faccia ad $AB = GL = LM = Gk = ki = HI = IK = Hm = ml$ compasso 1^0 e sarà fatto.

Dim. Poichè se dagli archi eguali GF, GB (§ 30) si sottragono gli eguali CF, NB (§ 31); resteranno eguali GC, GN; ed essendo CN una duodecima parte della circonferenza (§ 31); saranno GC, GN ventiquattresime parti di essa. Essendo poi $FN = GL$; tolto via FG; sarà $NG = FL$. Dunque anche FL sarà una ventiquattresima e la metà di FD (§ 31). Nello stesso modo si dimostrerà essere eguali a questi gli archi DH, HO, FI, IC, così tutti gli altri determinati qui sopra.

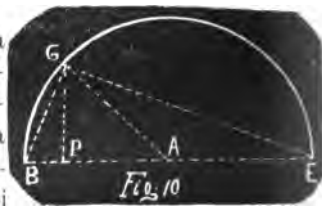
33. Noi ci siamo qui serviti senza citarle delle Prop. 26 e 27 del lib. III d'Euclide, che in un cerchio o in cerchj eguali le rette eguali sottendono archi eguali; il che faremo anche in seguito per brevità.

34. Gli antichi per via del centro A col raggio AB e col solo compasso divisero la circonferenza in sei parti eguali. Le altre divisioni le ottenevano col compasso e colla riga, prendendo varj punti fuori della circonferenza. Ora noi abbiamo trovato un punto a tale, che solo basta a dividere la circonferenza in ventiquattro parti eguali col solo compasso. Il che è nello stesso tempo più spedito e comodo, e porta ad una divisione pratica molto più accurata dell'antica.

35. Può sembrare elegante la serie delle aperture de' tre compassi, che bastano a questa divisione. Poichè si trova l'apertura del primo $= \sqrt{1}$, del secondo $= \sqrt{2}$, del terzo $= \sqrt{3}$.

36. *Lemma.* Se nel cerchio BGE sia il raggio $AB = 1$; sia

poi l'arco BG un'ottava parte della circonferenza; sarà il quadrato della sua corda BG, ossia $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (fig. 10).

Dim. Sul diametro BE si cali la perpendicolare GP. Nel triangolo rettangolo GPA a cagione dell'angolo semiretto GAP sarà semiretto ancora AGP (32, lib. I). Saranno dunque eguali i lati GP, PA (6, lib. I). È poi $(AG)^2 = (PG)^2 + (AP)^2$ (47, lib. I). Dunque $(AG)^2 = 2\,(AP)^2$; quindi $2\,(AG)^2 = 4\,(AP)^2$, ossia $2 = (2\,AP)^2$, e quindi $\sqrt{2} = 2\,AP$; $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $BP = AB - AP = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Si ha poi, essendo retto l'angolo BGE (31, lib. III), $BP : BG :: BG : BE$ (8, 4, lib. VI); quindi (17, lib. VI) $(GB)^2 = BP.\ BE = 2BP$. Dunque $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

37. *Lemma.* Stanti le stesse cose del § 36, sarà il quadrato della GE corda di tre ottave parti della circonferenza, ossia $(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}$.

Dim. Poichè sarà $(BE)^2 = (GE)^2 + (BG)^2$ (47, lib. I). Ma $(BE)^2 = 4$; $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (§ 36). Dunque $4 = (GE)^2 + 2 - \sqrt{2}$, e togliendo 2, aggiungendo $\sqrt{2}$, si avrà $2 + \sqrt{2} = (GE)^2$.

Fig. 11

38. *Prob.* Essendosi già divisa la circonferenza in ventiquattro parti (§ 32) eguali; suddividerla in quarantotto.

Sol. Si faccia ad $aN = Be = Ee$ (§ 11) compasso 4°; ad $AB = e\mu = e\nu$ compasso 1°. Saranno $K\mu$, μN, $M\nu$, νO (fig. 11) quarantottesime parti della circonferenza.

Dim. Se si concepiscono guidate le rette Aa, Nn, aN, aB (§ 12); essendo retto

l' angolo BAa (§ 27); e l'angolo $BAN = BAn$ (§ 31), e i tre raggi AN, AB, An eguali; sarà $(aN)^2 = (aB)^2 - Nn.\ Aa$ (§ 20); però a cagione di $aN = Be$, sarà pure $(Be)^2 = (aB)^2 - Nn.\ Aa$. Essendo poi i triangoli eAB,eAE a cagione de' lati rispettivamente eguali, rettangoli in A (8 e 13, lib. I); sarà $(Be)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2$ (47, lib. I). E però $(AB)^2 + (Ae)^2 = (aB)^2 - Nn.\ Aa$. Ma è $(aB)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2$. Sarà dunque $(AB)^2 + (Ae)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2 - Nn.\ Aa$; quindi sottraendo $(AB)^2$, si ha $(Ae)^2 = (Aa)^2 - Nn\ Aa$. Ma $(Aa)^2 = 2$ (§ 27), e $Nn = 1$; essendo Nn corda d'una sesta della circonferenza (§ 31). Dunque $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2}$ = al quadrato della corda dell' arco BG, che è l'ottava parte della circonferenza (§ 30, e 36). Sarà dunque l'arco $B\mu = \mu G$ (§ 24). Se poi da questi archi si sottraggono gli archi eguali BK, NG (§ 32); saranno gli archi $K\mu$, μN eguali. Essendo dunque l'arco KN la vigesimaquarta parte della circonferenza (§ 32); saranno le sue metà, ossia gli archi $K\mu$, μN, e per la stessa ragione gli archi $M\nu$, νO, la quarantottesima parte della circonferenza.

39. Stanti le stesse cose potrebbe chi volesse, col solo ajuto dei quattro compassi indicati qui sopra, dividere tutta la circonferenza in quarantotto parti eguali (§ 8), (fig. 11). Poichè se pel primo compasso di apertura $= AB$ si divida la circonferenza in sei parti cominciando dal punto μ, si bipartiranno gli archi IF, HO, mo, fl, ng. Dividendo poi la circonferenza in sei parti cominciando dal punto ν, resteranno divisi gli archi oh, fi, nk, NG, FL. Dividendo poi la circonferenza in quattro parti col terzo compasso di apertura eguale ad Aa cominciando dal punto μ, resteranno divisi gli archi LD, ic; cominciando poi dal punto ν, resteranno divisi gli archi IC, Id. In seguito dividendo la circonferenza in sei parti eguali di nuovo col primo compasso, ma cominciando dagli ultimi punti trovati col terzo compasso, resteranno divisi per metà tutti gli altri archi.

La dimostrazione è simile a quella del § 32.

40. *Prob.* Dividere la circonferenza BDd in cinque parti eguali.

Sol. Stanti le cose come nel Problema § 31, si faccia ad *Aa=Nb=Ob,* compasso 3° (fig. 12). Si faccia a *Bb=BQ*.

Sarà larco *BQ* la quinta parte della circonferenza.

Dim. Se si concepiscano condotte due rette *NO*, *AF*, che si tagliano in *X;* a cagione dei triangoli equilateri *FNA, FOA* la retta *FA* sarà bipartita in *X* (10, lib. I); così pure *NO* (§ 14). Essendo poi l'arco *NFO* eguale all'arco *BCD* (§ 31), sarà il quadrato della sua corda *NO* eguale al quadrato della corda $BD=3$ (§ 2), il quadrato poi della sua metà *NX*, ovvero $(NX)^2=\frac{3}{4}$ (per Coroll. della Prop. 4, lib. II). Sono poi nella stessa retta i punti *b*, *A*, *X*, e il triangolo *NbX* rettangolo

(§ 12, 13, 14); così $(Nb)^2 = (Aa)^2 = 2$ (§ 27). Laonde $(Xb)^2 = (Nb)^2 - (NX)^2$ (47, lib. I) $= 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Ma per l' angolo retto XAB lo stesso che FAB si ha $(BX)^2 = (AB)^2 + (AX)^2$ (47, lib. I).

Ed è $(AX)^2 = {}^1/_4\, (AF)^2$ (per Coroll. Prop. 4 del II). Sarà dunque $(BX)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = (Xb)^2$. Dunque le rette BX, Xb sono eguali. Sarà dunque questo punto b quello stesso, che adopera Tolommeo nel primo Libro dell' Almagesto per iscrivere un pentagono, e un decagono equilatero ed equiangolo nel cerchio. Vedi la dimostrazione del Clavio nello Scolio alla Prop. 10 del Libro XIII d'Euclide. Vedi ancora i numeri seguenti (§ 45 ecc.), dai quali risulterà la dimostrazione intera di questa Proposizione e delle seguenti.

41. *Prob.* Dividere la circonferenza in dieci parti eguali.

Sol. Stanti le cose come nel Problema precedente (§ 40), si faccia ad $Ab = BP$, sarà $BP = PQ$, archi eguali alla decima parte della circonferenza (fig. 12).

Dim. Vedi 10, lib. XIII d'Eucl.

42. *Prob.* Dividere la circonferenza in centoventi parti eguali.

Sol. Stanti le cose come ne' Problemi §§ 32 e 40, sarà QI la centoventesima parte della circonferenza (fig. 12).

Dim. Poichè l'arco BI è eguale a cinque ventiquattresime della circonferenza (§ 32), e l' arco BQ eguale a una quinta. Dunque $QI = BI - BQ = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} = \frac{25-24}{120} = \frac{1}{120}$.

43. Potrà chi voglia con soli quattro compassi, ossia quattro aperture d'un compasso, e con soli due punti presi fuori della circonferenza, cioè coi soli due punti a e b, dividere la circonferenza del cerchio in centoventi parti eguali.

Poichè col punto a, e con tre compassi avendo divisa la circonferenza in 24 parti (Probl. § 32), e avendo trovato il punto b (§ 40); si faccia col quarto compasso ad $Ab = BP = PQ = QR = RS$, a cui sarà pure eguale SE (§ 41). Ora per dividere l'arco NG in cinque parti eguali, ciascuna delle quali sarà una centoventesima; si faccia ad $Ab = Lq = qp = \lambda\pi = O\rho = \rho\omega = \omega\varphi$. Sì

avrà diviso l'arco NG in cinque parti eguali. Nello stesso modo si potranno dividere tutti gli altri archi GC, CI, ecc.

Dim. Poichè essendo $BQ=RE$: $BF=FE$: $IF=FL$: sarà anche $IQ=LR$, ed essendo $Lq=QR$: sarà anche $Qq=LR=QI$. Nello stesso modo essendo $QP=qp$: sarà anche $Qq=Pp=QI$. Parimente a cagione di $I\pi=QP$, sarà $\pi P=QI$. Essendo poi $O\omega=BQ$: $OI=IB$; sarà ancora $I\omega=QI$. Inoltre a cagione di $\omega\varphi=I\pi$: sarà $I\omega=\varphi\pi=QI$. Essendo poi $O\varphi=O\pi+\pi\omega+\omega\varphi=BP+PQ-QR=BR$, tolti di qua e di là gli archi eguali OG, BL; si avrà il residuo $G\varphi=LR=QI$. Finalmente a cagione di $BI=LN$, tolti gli archi eguali BQ, Lp, sarà il residuo $QI=Np$. Si sarà dunque diviso l'arco NG ne' cinque archi Np, pP, $P\pi$, $\pi\varphi$, φG eguali ciascuno all'arco QI, e però eguali tra loro. Essendo poi NG una ventesimaquarta della circonferenza (§ 32), sarà ogni sua quinta parte una centoventesima della circonferenza.

44. Abbiamo dunque ormai diviso col solo compasso la circonferenza in tutte quelle parti eguali, le quali si ottenevano dagli antichi inscrivendo al cerchio i cinque poligoni regolari triangolo, quadrato, pentagono, esagono e decagono, impiegando insieme il compasso e la riga. È poi riuscito di sommo comodo l'aver potuto ottenere tutto ciò coll'assumere solamente due punti fuori della circonferenza cioè a, e b, e coll'impiegare solamente quattro aperture di un compasso, ossia quattro compassi (§ 43, 8). Chi vorrà fare il confronto di questo metodo, col metodo conosciuto potrà giudicare della sua semplicità e speditezza, e della sua precisione nella pratica.

45. Essendo pel § 40

$$Xb+XF=Fb=Xb+XA$$
$$Ab=Xb-XA$$

sarà
$$Fb.\,Ab=(Xb)^2-(XA)^2$$
$$=(XB)^2-(XA)^2=(AB)^2$$

ossia $Fb\,.\,Ab=(FA)^2$; quindi la Fb sarà divisa in A in estrema e media ragione (30, lib. VI).

46. Sarà quindi $Fb\,.\,Ab=(FA+Ab)\,.\,Ab=(fA)^2=(fA+Ab)\,.\,Ab=fA\,.\,Ab+(Ab)^2=fA.(fA-fb)+(Ab)^2=(fA)^2-fA.fb+(Ab)^2$. Avendosi dunque $(fA)^2=(fA)^2-fA\,.\,fb+(Ab)^2$, tolto $(fA)^2$, e aggiunto $fA\,.\,fb$; si avrà $fA\,.\,fb=(Ab)^2$. Quindi anche la Af sarà divisa in b in estrema e media ragione.

47. Se col centro f, raggio bA si tagli la circonferenza in T; sarà $Tf = Tb = bA$. Poichè si avrà $fA \cdot fb = (Ab)^2$ (§ 46) $=(Tf)^2$. E quindi (17, lib. VI) $fA : fT :: fT : fb$. Dunque i due triangoli fAT, fbT, che hanno l'angolo comune in f, avranno i lati che lo contengono proporzionali; e quindi (6, lib. VI), saranno simili. Sarà dunque isoscele anche il triangolo fbT, e sarà $Tb = Tf$.

48. L'angolo $TbA = Tfb + bTf$ (32, lib. I) $= Tbf + bAT$, e aggiungendo Tbf; sarà $TbA + Tbf = 2Tbf + bAT$; ma $TbA + Tbf =$ due retti (13, lib. I). Dunque $2Tbf + bAT =$ due retti. Ma $Tbf = bAT + bTA$ (32, lib. I) $= 2bAT$ (5, lib. I). Dunque $2Tbf + bAT = 5bAT =$ due retti. Quindi l'angolo bAT, che è lo stesso coll'angolo fAT, sarà una quinta di due retti, e l'arco fT una decina della circonferenza.

49. Se si piglia la corda $ft = fT$; sarà pure $bt = ft$ (§ 47), e le due tT, bf si taglieranno per metà ad angoli retti in un punto y (§ 14); e sarà $(Tf)^2 = (Ty)^2 + (fy)^2$; quindi $4(Tf)^2 = 4\,(Ab)^2 = 4\,(Ty)^2 + 4(fy)^2 = (Tt)^2 + (fb)^2$; quindi $(Tt)^2 = 4\,(Ab)^2 - (fb)^2$. Ma $(fb)^2 = (fA - Ab)^2 = (fA)^2 - 2fA \cdot Ab + (Ab)^2$. Dunque $(Tt)^2 = 3\,(Ab)^2 - (fA)^2 + 2fA \cdot Ab$. Ora $2fA \cdot Ab = 2fA \cdot (fA - fb) = 2(fA)^2 - 2fA \cdot fb = 2(fA)^2 - 2(Ab)^2$. Dunque $(Tt)^2 = 3(Ab)^2 - (fA)^2 + 2(fA)^2 - 2\,(Ab)^2 = (fA)^2 + (Ab)^2 = (BA)^2 + (Ab) = (Bb)^2$; e quindi $Tt = Bb$. Ma Tt è corda di due decime, ossia d' una quinta parte della circonferenza. Quindi anche Bb. Quindi

50. Nel triangolo rettangolo ABb il quadrato del lato del pentagono è eguale alla somma de' quadrati dei lati dell' esagono e del decagono. Questa è la 10, lib. XIII d'Eucl.

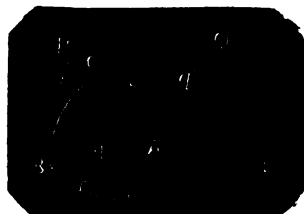
51. I lati del triangolo rettangolo ABb sono corde di archi, che sono in progressione contrarmonica. Poichè questi archi sono $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_{10}$ della circonferenza. Si trova poi

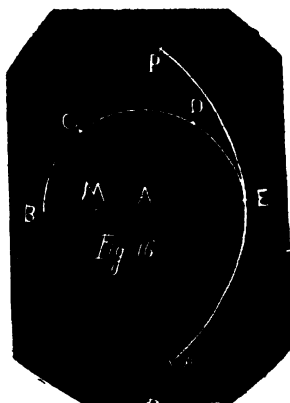
$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} : \frac{1}{6} - \frac{1}{10} :: \frac{1}{10} : \frac{1}{5}.$$

52. Essendo $fb : bA :: bA : Af$ (§ 46); è ancora $fb : bA :: bA : AF$; e quindi il diametro Ff resta diviso ne' punti A e b in tre parti continuamente proporzionali.

53. *Prob.* Dividere la circonferenza in venti parti, ossia trovare una ventesima parte di essa.

e le tre PE, BE, pE alle tre AQ, pQ, BQ, e la Pm alla AS; l'equazione $A\,S.\ p\,Q = (Ap)^2$ del § 22, si cangerà nella $Pm.\ BE = (BP)^2$; ed essendo $BE = 2\,AB$; $BP = AB$; sarà $2\,A\,B.\ Pm = (AB)^2$, e dividendo per AB; $2Pm = AB = 2\,B\,M$. Sarà poi il triangolo BPM d'angoli eguali al triangolo BPm (8, lib. I). Quindi mP parallela alla BM (28, lib. I). Ma anche i due triangoli BPm, BPE hanno gli angoli eguali (§ 22). Dunque mP è parallela alla BE (28, lib. I). Dunque le rette BM, BE coincidono.

Sol. II. Col raggio AB, centro A si descriva la semicirconferenza $BCDE$ (§ 64) (fig. 15). Collo stesso raggio, e coi centri B ed E si segnino due archi indefiniti CP, DQ. Cogli stessi centri B ed E, e col raggio BE si segnino i due archi EQ, BP. Col centro P, raggio PB si descriva l'arco BM. Col centro E, raggio PQ si tagli l' arco BM in M. Sarà M il punto cercato.

Dim. Fatte le debite sostituzioni nella Fig. 5 (§ 23); si avrà $PQ.\ BE = (BE)^2 - (BP)^2$; ed essendo $BE = 2\,AB$; $BP = AB$; $PQ = ME$; sarà $2ME.\ AB = 4(AB)^2 - (AB)^2 = 3\,(AB)^2$. Quindi dividendo per AB, si avrà $2\,ME = 3\,AB$. Ma per essere eguali i lati opposti, sarà $PQEM$ un parallelogrammo. Poichè diviso in due triangoli di lati eguali colla diagonale $Q\,M$ dà l'angolo $PQM = QME$ (8, lib. I), e quindi PQ parallela ad ME (28, lib. I), così PM a QE (33, lib. I). É poi anche PQ parallela alla $B\,E$ (§ 23). Dunque $M\,E$, $B\,E$ coincidono. Essendo dunque perciò $ME = MA + AE = MA + AB$; sarà $2\,ME = 2MA + 2AB = 3AB$; quindi $2MA = AB$.

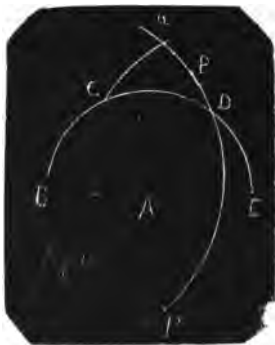
Sol. III. Col centro A, raggio AB si descriva la semicirconferenza $BCDE$ (§ 64) (fig. 16). Col centro B, raggio BE si descriva l' arco indefinito PEp. Col centro E, raggio EC si tagli quello in P e p. Coi centri

P e *p*, e collo stesso raggio *PE* si descrivano due archi, che si taglino in *M*. Sarà *M* il punto cercato.

Dim. Il punto *M* sarà sulla retta *BE* (§ 13); e sostituendo nell'equazione (§ 19) $pP.\ pQ = (Ap)^2$ le distanze, ossia le rette corrispondenti di questa Figura, ne verrà l'equazione $EM.\ EB = (PE)^2$. Quindi a cagione di $(PE)^2 = (EC)^2 = 3\,(AB)^2$ (12, lib. XIII) (§ 2), si avrà $2AB\,.\,EM = 3(AB)^2$, e dividendo per *AB*; $2EM = 3AB$; ovvero $2AE + 2AM = 3AB$; e tolte le quantità eguali $2AE$, $2AB$, risulta $2AM = AB$.

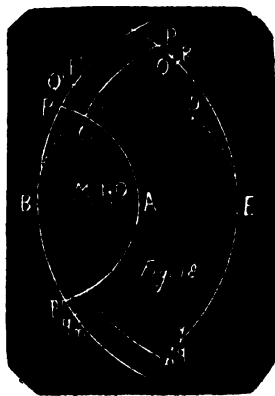
Sol. IV. Descritta la semicirconferenza *BCDE* (§ 64), col centro *B*, e col raggio *BD* (fig. 17) si descriva un arco indefinito *aDp*. Collo stesso raggio *BD*, centro *E* si tagli quest' arco in *a*. Col raggio *A a*, e col centro *E* si tagli quest' arco *a D p* in *P*, e *p*. Collo stesso raggio *Aa*, e coi centri *P* e *p* si segnino due archi, che si taglino in *M*. Sarà *M* il punto cercato.

Dim. Il punto *M* sarà sulla retta *BE* (§ 13). Fatte poi le debite sostituzioni nell'equazione $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ.\ PQ$ (§ 18), si avrà $(PB)^2 = (PE)^2 + EB.\ MB$; ossia $(BD)^2 = (Aa)^2 + 2AB.\ MB$; ossia $3(AB)^2$ (12, lib. XIII) (§ 2) $= 2\,(AB)^2$ (§ 27) $+ 2\ AB.\ MB$. Quindi sottraendo $2(AB)^2$, risulta $AB = 2\ MB$.

Molte altre soluzioni si possono dare a questo Problema o adoperando nuovi raggi di cerchio, o combinando tra loro le soluzioni date qui sopra; ma stimo superfluo indicarle. Una assai semplice, ma che però in pratica non conduce a molta esattezza, perchè in essa l'intersezione degli archi si fa ad un angolo troppo acuto, è la seguente:

Sol. V. Col raggio *AB*, centro *A* (fig. 14) descritta la semicirconferenza *BCDE* (§ 64); col centro *E*, raggio *EB* descritto l'arco indefinito *PBp*; col centro *B*, raggio *BA* tagliando quest'arco in *P* e *p*; con questi centri *P* e *p*, e collo stesso raggio *BA* si descrivano due archi, che si taglino in *M*. Sarà *M* il punto cercato.

Dim. Il punto M sarà sulla BE (§ 13). Essendo poi simili i due triangoli isosceli PBM, PBE a cagione d'un angolo alla base comune in B (5 e 32, lib. I; 4, lib. VI); sarà $BE : BP : : BP : BM$; quindi (17, lib. VI) $BE . BM = (BP)^2 = (AB)^2$, ossia $2AB . BM = (AB)^2$; quindi dividendo per AB, risulta $2BM = AB$.

67. *Prob.* Proseguire a suddividere in due parti eguali colla più semplice costruzione (fig. 18), la AM in N; la AN in O; ecc. all'infinito.

Sol. I. Essendo stata descritta la semicirconferenza $BCDE$ col raggio AB (§ 64), e collo stesso raggio, e col centro B l'arco indefinito $P'CAp'$; coi centri E e B, e col raggio BE i due archi $R'Q'P'Bp'q'r'$, $PQRErqp$; col centro E, raggio EC l'arco PCp; se coi centri P' e p', raggio AB si descrivano due archi; essi si taglieranno in M al mezzo della AB (Sol. V, § 66). Se coi due centri P e p, raggio PE si descrivano due archi; essi si taglieranno pure nel medesimo punto M (Sol. III, § 66).

Ora si faccia ad $AP' = BQ' = Bq' = q'N = Q'N$ (§ 11). Sarà il punto N alla metà della AM.

Si faccia ad $AQ' = BR' = Br' = r'O = R'O$. Sarà il punto O alla metà della AN.

Seguitando collo stesso metodo, si dividerebbe AO in due parti eguali ecc. all'infinito.

Dim. S'immagini una retta $P'A$, che divide in due la base BE del triangolo $P'BE$ (§ 12). Sarà $(BP')^2 + (P'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP')^2$ (§ 26). Quindi sostituiti i valori di $BP' = AB$ e di $P'E = 2AB$, e sottratto $2(AB)^2$; si avrà $3\,(AB)^2 = 2\,(AP')^2$, e quindi dividendo per 2, risulterà $(AP')^2 = (BQ')^2 = {}^3/_2\,(AB)^2$. Essendo poi N nella retta BE (§ 13); sarà il triangolo isoscele $Q'BN$ simile al triangolo isoscele $Q'BE$ a cagione dell' angolo comune in B (5 e 32, lib. I, e 4, lib. VI). Quindi $(BQ')^2 = BN. BE$ (17, lib. VI). Quindi paragonando tra loro i due valori di $(BQ')^2$, si avrà ${}^3/_2\,(AB)^2 = BN. BE = 2\,BN. AB$, e divi-

dendo per $2AB$, si avrà $^3/_4\ AB = BN$. Dunque $AN = {}^1/_4\ AB$.

Istessamente si avrà $(BQ')^2 + (Q'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ')^2$ (§ 26), quindi $^3/_2\ (AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ')^2$, e riducendo si avrà $^7/_4\ (AB)^2 = (AQ')^2 = (BR')^2$. Ma $(BR')^2 = BO.\ BE = 2AB.\ BO$. Dunque $^7/_4\ (AB)^2 = 2\,AB.\ BO$, e quindi $^7/_8\ AB = BO$; ed $AO = {}^1/_8\ AB$; ecc.

Sol. II. Si faccia ad $AP = EQ = Eq = qN = QN$. Sarà il punto N alla metà della AM. Si faccia ad $AQ = ER = Er = rO = RO$. Sarà il punto O alla metà della AN. Seguitando collo stesso metodo si dividerebbe in due la AO, così via via all' infinito.

Dim. Poichè si ha (§ 26) $(PE)^2 + (PB)^2 = 2\ (AB)^2 + 2\ (AP)^2$, e sostituiti i valori di $(PE)^2 = (CE)^2 = 3\ (AB)^2$ (12, lib. III) (§ 2), e di $(PB)^2 = (BE)^2 = 4(AB)^2$; si ha $7\ (AB)^2 = 2\ (AB)^2 + 2(AP)^2$. Quindi tolti via $2\ (AB)^2$, e dividendo per 2, si ha $^5/_2\ (AB)^2 = (AP)^2 = (EQ)^2$. Ma $(EQ)^2 = EN.\ EB$ a cagione de' triangoli isosceli simili EQN, EQB (§ 13) (5 e 32, lib. I, 4 e 17 lib. VI). Dunque $^5/_2\ (AB)^2 = EN.\ EB = 2\ EN.\ AB$; e dividendo per $2\ AB$ si ottiene $^5/_4\ AB = EN$; ed $AN = {}^1/_4\ AB$.

Collo stesso metodo ragionando si avrà $(QE)^2 + (QB)^2 = 2\ (AB)^2 + 2\ (AQ)^2$. Quindi $^5/_2\ (AB)^2 + 4\ (AB)^2 = 2(AB)^2 + 2\ (AQ)^2$. Quindi pure $^9/_4 (AB)^2 = (AQ)^2 = (ER)^2 = EO.\ EB = 2\ AB.\ EO$. Quindi dividendo per $2\ AB$, si ottiene $^9/_8\ AB = EO$; ed $AO = {}^1/_8\ AB$; ecc.

Sol. III. Col centro A, raggio AB descritta la semicirconferenza $BCDE$ (§ 64) (fig. 19), collo stesso raggio AB, e coi centri B ed E descritti gli archi CP, Dp indefiniti; cogli stessi centri B ed E, e col raggio BE descritti gli archi $Epqr$, $BPQR$; si sarà potuto trovare il punto M col fare $PM = PB$; $EM = Pp$ (Soluz. II, § 66).

Fig. 19

Ora si faccia ad $AP = BQ = QN = Eq$. Si faccia pure a $Qq = EN$.

Sarà il punto N alla metà della AM.

Si faccia parimente ad $AQ = BR = RO = Er$. Si faccia pure ad $Rr = EO$.

Sarà il punto O alla metà della AN. Ecc.

Dim. Fatte le dovute sostituzioni nella Fig. 5 (§ 23); si

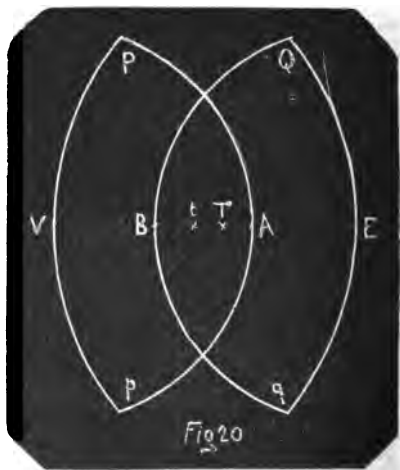
avrà $Qq. BE=(BE)^2-(BQ)^2$. Ma $BE=2AB$; $(BQ)^2 = {}^3/_2\, AB)^2$ (Vedi la dimostr. della Sol. I). Dunque $2Qq.\, AB = 4(AB)^2 - {}^3/_2\, (AB)^2$, e dividendo per $2AB$, e riducendo si ha $Qq = {}^5/_4\, AB$. Dunque anche $EN = {}^5/_4\, AB$. Dunque essendo la AB la stessa nelle due Figure 18 e 19, saranno pure gli stessi i lati dei due triangoli $Q'NE$ Fig. 18, QNE Fig. 19. Quindi sovrapponendo i tre punti B, Q, E della Fig. 19 sovra i tre B, Q', E della 18, anche i punti N delle due Figure coincideranno. Dunque ecc.

Istessamente facendo le dovute sostituzioni nella Fig. 5 (§ 23), si ha $Rr.\, BE=(BE)^2 - (BR)^2$. Ma $(BR)^2 = {}^7/_4\, (AB)^2$ (Dimostr. della Soluz. I); dunque $Rr.\, BE=(BE)^2 - {}^7/_4\, (AB)^2$. Ovvero sostituendo $2AB$ a BE; $2AB.\, Rr = 4(AB)^2 - {}^7/_4\, (AB)^2$ E dividendo per $2AB$, e riducendo si ha $Rr = {}^9/_8\, AB = OE$. Dunque coincidendo i punti E, R, B di questa Fig. 19 coi punti E, R', B della Fig. 18, ed essendo qui le RO ed EO eguali rispettivamente alle $R'O$, EO della Fig. 18; coinciderà anche il punto O. Quindi O sarà alla metà di AN. Nella stessa guisa si dimostrerebbe in seguito fino all'infinito.

Si potrebbero usare altre maniere di trovare gli stessi punti; ma passeremo ad altre divisioni della AB in un diverso numero di parti.

68. *Prob.* Dividere in tre parti eguali la distanza AB.

Sol. Alla AB si aggiungano in linea retta di qua e di là le due distanze AE, BV eguali alla AB (§ 64) (Fig. 20). Coi centri E e V, e col raggio EV si descrivano due archi indefiniti QEq, PVp. Cogli stessi centri E e V, e col raggio EB si descrivano due altri archi, che tagliano i primi in Q, q, P, p. Con questo stesso raggio EB, e coi centri P, p si descrivano due archi, che si tagliano in t. Collo ...ggio, e coi centri

Fig. 20

Q, q si descrivano due archi, che si taglino in T. Sarà la AB divisa in tre parti ne' due punti T, t.

Dim. I punti T, t saranno nella retta VE (§ 13). Sarà poi il triangolo isoscele EQT simile all' isoscele EQV, avendo un angolo comune in E (5 e 32, lib. I, 4, lib. VI). Dunque $(QE)^2 = ET.\ EV$ (17, lib. VI). Sostituendo in questa equazione a QE, $2AB$, e ad EV, $3AB$, ne verrà $^4/_3\ AB = ET$; e quindi $AT = {}^1/_3\ AB$. Nella stessa maniera si dimostrerà, che anche Bt è un terzo di AB, e quindi anche Tt.

69. *Prob.* Dividere una distanza AB in un qualunque numero di parti eguali.

Sol. Da un esempio, o due si rileverà meglio la regola generale (fig. 21).

Es. I. Sia la distanza AB da dividersi in cinque parti eguali. Ad essa si aggiungano in linea retta le quattro distanze eguali alla medesima AE, EF, FG GH (§ 65), in maniera che resti quintuplicata in BH, ossia moltiplicata per tante unità, in quante parti si vuole dividere la medesima. Cogli estremi B ed H come centri, e col raggio AB della lunghezza della distanza, che si vuol dividere, si descrivano i due archi indefiniti AC, GI. Cogli stessi centri B ed H, e col raggio BH si descrivano i due archi HI, BC. Col centro C, e col primo raggio AB si descriva un arco indefinito BQ. Col raggio CI, centro H, si descriva un arco, che tagli l' arco BQ in Q. Sarà la distanza BQ sulla direzione della BA, e sarà la quinta parte di essa.

Se adesso alla BQ si aggiunge l'eguale Qq (§ 64), quindi le altre eguali qr, rs, si avranno determinate tutte le quinte parti della BA.

Es. II. Se si vuole dividere la AB in sette parti (fig. 22);

si formi la BH sette volte maggiore della BA. Cogli estremi di questa cioè coi punti B ed H, e col raggio AB si descrivano gli archi indefiniti AC, GI. Cogli stessi centri B ed H, e col raggio BH si descrivano i due archi HI, BC. Col centro C, e col primo raggio AB si descriva un arco indefinito BQ. Col raggio CI, centro H, si tagli quest' arco in Q; sarà BQ sulla direzione della BA, e sarà la settima parte di essa.

Dim. Essendo il triangolo CQI di lati rispettivamente eguali al triangolo IHQ; sarà l' angolo $CIQ = IQH$ (8, lib. I), quindi CI parallela ad HQ (28, lib. I). Essendo poi la CI parallela anche alla BH (§ 23), sarà il punto Q sulla BH. Quindi avendo i due triangoli isosceli CBQ, CBH un angolo alla base comune in B; saranno simili (5 e 32, lib. I; 4, lib. VI), e sarà $HB : BC :: BC : BQ$, ossia $HB : AB :: AB : BQ$. Quante volte dunque la HB sarà maggiore della AB, altrettante la AB sarà maggiore della BQ.

Sol. II. Si voglia dividere la AB per esempio in cinque

parti (fig. 23). Determinata, come nella Soluz. I, la BH cinque volte maggiore della AB; col centro H, e col raggio HB si de-

scriva un arco indeterminato CBc. Ora col raggio BA, e col centro B si descriva la semicirconferenza cCK (§ 64). Collo stesso raggio AB, e col centro C si descriva l' arco BQ. Col raggio CK, e col centro B si tagli quest'arco in Q; sarà BQ la quinta parte della BA posta sulla stessa direzione.

Dim. La retta BK sarà sulla continuazione della Bc (15, lib. IV). Fatte perciò le dovute sostituzioni nel § 22, si avrà $KC . BH = (BC)^2 = (AB)^2$; e quindi (17, lib. VI) $BH : AB :: AB : KC$. Ovvero $BH : AB :: AB : BQ$. Quanto dunque la BH sarà maggiore della AB, tanto la stessa AB sarà maggiore della BQ; e se sarà $BH = 5AB$, sarà anche $AB = 5BQ$. Per l' eguaglianza poi dei lati tra loro nei due triangoli BKC, BCQ si avrà l'angolo $KCB = CBQ$ (8, lib. I). Ma all'angolo KCB è pur eguale l' angolo CBH (§ 22). Dunque la BQ è sulla direzione della BH.

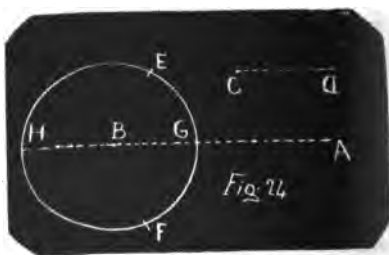
70. Si vede chiaramente, che quest'ultimo Problema (§ 69) può molto servire nella pratica per dividere in linee un piede dato, e già diviso in pollici; poichè col metodo di esso essendo BH eguale a dodici pollici, riuscirà BQ eguale ad una dodicesima del primo pollice AB, cioè ad una linea. Nella stessa maniera il metro gia diviso in decimetri si potrà suddividere in centimetri. Se sarà già descritta la retta AB, sulla quale si ha a trovare il punto Q; l' operazione sarà più semplice, poichè senza descrivere col centro C, raggio AB l' arco BQ, basterà tagliare in Q la data retta AB colle aperture di compasso indicate qui sopra.

LIBRO QUARTO

DELL'ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DELLE DISTANZE; DELLA SITUAZIONE DELLE PERPENDICOLARI E DELLE PARALLELE

71. L'aggiungere, o togliere una distanza da un'altra data, che è così semplice e facile a farsi col compasso e colla riga, tirando una retta indefinita pei due estremi della prima distanza, e sopra essa aggiungendo, o togliendo la seconda distanza col compasso (3, lib. I) non è certo così pronta cosa, e spedita a farla col solo compasso; nè qui si propongono questi Problemi come di grande uso; ma solo perchè si vegga non poter esserci alcun Problema della Geometria Elementare, che non si possa anche sciogliere col compasso solo nel senso spiegato (§ I), il che si dimostrerà poi più rigorosamente a suo luogo, e perchè non manchi alcuno degli Elementi di questa nuova Geometria giusta la promessa (§ 7).

72. *Prob.* Dalla distanza *AB* togliere una distanza eguale a *CD* (fig. 24).

Sol. Col raggio *CD*, e col centro *B* (se la distanza si vuol togliere da quella parte) si descriva un cerchio *FGEH*. Col centro *A*, e con qualche raggio si descriva un arco, che tagli il cerchio in *E* ed *F*. Si divida in due l'arco *EGF* (§. 60) in *G*. sarà il punto *G* sulla retta *BA*, e sarà *GA* il residuo.

Dim. Avendo i due triangoli *EBG*, *FBG* i lati eguali; sarà

l'angolo $EBG=FBG$ (8, lib. I). Sarà dunque l'angolo EBG eguale alla metà dell' angolo EBF. Avendo pure i lati eguali tra loro i due triangoli EBA, FBA; si proverà nella stessa maniera, che anche l' angolo EBA è la metà dell' angolo EBF. Dunque l' angolo EBG è eguale ad EBA. Dunque il punto G è sulla BA. Ma è anche BG eguale alla CD. Dunque GA sarà il residuo della AB toltane la CD.

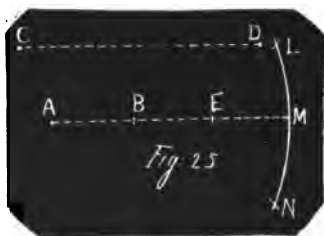
73. *Prob.* Alla distanza AB aggiungere la distanza CD in linea retta (fig. 24).

Sol. Col centro B (se l'aggiunta si vuol fare da quella parte), e col raggio CD si descriva il cerchio $FGEH$. Col centro A, e con qualche raggio si descriva un arco, che tagli il cerchio in E ed F. Si divida in due l' arco EHF in H (§ 60). Sarà il punto H sulla retta AB; e sarà AH la somma delle due distanze AB, CD.

Dim. Per l'eguaglianza de' lati tra loro ne' due triangoli EBH, FBH, così pure ne' due triangoli EBA, FBA si troverà (8, lib. I) l'angolo $EBH=FBH$, e l'angolo $EBA=FBA$. Dunque $EBH+EBA=FBH+FBA$. Ma la somma di tutti questi quattro angoli è eguale a quattro retti (13, lib. I). Dunque la loro metà, per esempio $EBH+EBA$, sarà eguale a due retti, e quindi la HBA sarà una retta (14, lib. I). È poi $BH=CD$. Dunque $AH=AB+CD$.

74. *Prob.* Sulla AB da A verso B collocare la CD maggiore della AB (fig. 25).

Sol. Col centro A, e col raggio CD si descriva un arco indefinito LMN, ovvero un cerchio intero. Col centro B, e con raggio arbitrario si descriva un arco, che tagli il primo ne' due punti L ed N. Si divida in due parti eguali l' arco LN (§ 60) in M. Sarà la AM la stessa CD posta a quel luogo, che che si voleva.

Fig. 25

Dim. Col metodo delle dimostrazioni de' due Problemi precedenti (§§ 72 e 73) si troverà, che essendo l' angolo $LMA=NMA$ (8, lib. I) $= {}^1/_2\, LMN$; così pure $LMB=NMB = {}^1/_2\, LMN$;

sarà *LMA*=*LMB*, e quindi *ABM* retta. È poi anche eguale a *CD*. Dunque ecc.

75. *Avv*. Se l'arco descritto col centro *B* tagliasse ad angoli troppo acuti l'arco descritto col centro *A;* il che succede, quando *AB* è troppo piccola per rapporto a *CD;* alla *BA* si aggiunga l'eguale *AE* in linea retta, e l'arco *LMN* descritto col centro *A* si tagli con un arco descritto col centro *E* in *L* ed *N*. Se anche in tal caso gli angoli de' due archi riuscissero troppo acuti; si triplichi, si quadruplichi, ecc. (§ 65) la retta *AB* da *A* verso *B*, fino a che l'ultimo suo punto preso per centro del secondo arco dia gli angoli d' intersezione in *L* ed *N* più vicini all'angolo retto. Si faccia lo stesso in casi simili pei §§ 72 e 73.

76. *Prob.* Dati i due punti *A* e *B;* trovare un punto *H* tale, che la retta *BH* sia perpendicolare alla *AB* in *B* ed eguale ad una data *CD* (fig. 26).

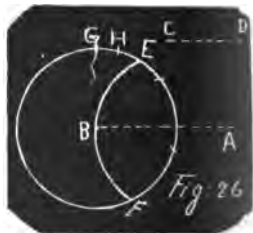
Sol. Col centro *B*, e colla distanza *CD* per raggio si descriva un cerchio *FEHG*. Col centro *A*, e colla distanza *AB* per raggio si descriva un arco, che tagli il cerchio in *F* ed *E*. Si determini la semicirconfererza *FEG* (§ 64). Si divida in due egualmente l'arco *GE* in *H* (60). Sarà *H* il punto cercato.

Fig. 26

Dim. Per la simiglianza de' due triangoli *GEB*, *EBA* (§ 22) sarà l'angolo *GEB* =*EBA*, e quindi *GE* parallela a *BA* (28, lib. I). Ma *BH*, che divide in due egualmente l' angolo *GBE*, è perpendicolare alla corda *GE* (9, 11, 12 lib. I). Dunque anche alla *BA* (28, lib. I). Ma è in oltre *BH* = *CD*. Dunque *H* è il punto cercato.

Se la *AB* fosse troppo minore della *CD;* si duplichi, o si triplichi ecc. (§ 64, 65).

77. *Prob.* Dati i due punti *A* e *B;* trovare un punto *D* in guisa, che la *DA* sia perpendicolare alla *AB* (fig. 27).

Sol. Preso un raggio arbitrario (per esempio la stessa *AB*);

con esso, e coi due centri A e B si descrivano due archi, che si taglino in C. Con questo stesso raggio, e col centro C si descriva la semicirconferenza BAD (§ 64). Sarà D il punto cercato.

Dim. L'angolo DAB è nel semicerchio. Dunque è retto (31, lib. III).

78. *Prob.* Dati i due estremi d'una retta AB e un punto D fuori di essa, trovare un altro punto E (fig. 28), che determini la posizione della DE perpendicolare alla AB, e il punto M, dove la taglia.

Sol. Si faccia ad $AD=AE$, a $BD=BE$ (§ 11). Sarà E il primo punto cercato. Si divida DE per metà in M (§ 66). Sarà M il secondo.

Dim. Resta dimostrata questa Soluzione dal § 14.

79. *Prob.* Trovare due punti di una retta, che sia perpendicolare al mezzo della DE (fig. 28).

Sol. Preso un raggio arbitrario, si faccia a questo$=DA=EA$. Preso lo stesso raggio, o un altro arbitrario, si faccia a questo dall' altra parte$=DB=EB$. Saranno A e B i due punti cercati.

Dim. Resta dimostrata questa Soluzione dal § 14.

80. *Prob.* Dati due punti A e B d' una retta, e un punto C fuori di essa (fig. 29), pel quale si voglia condurre una parallela alla AB; trovare un altro punto D, che ne determini la posizione.

Sol. Si faccia a $CA=BD$ (§ 11); $BA=CD$. Sarà D il punto cercato.

Dim. Nei due triangoli CDB, CAB, che hanno i tre lati eguali

fra loro, l' angolo DCB è uguale all' angolo CBA (8, lib. I). Dunque CD è parallela ad AB (28, lib. I).

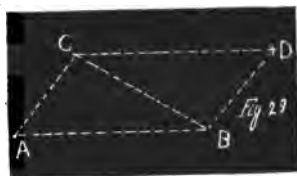
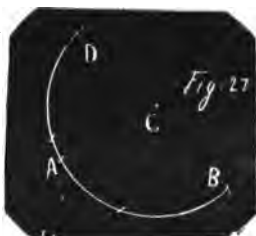
81. *Prob.* Dati due punti A, e B d'una retta, e nn punto

C fuori di essa; collocare a questo punto C una distanza CE; (fig. 30); cosicchè la retta CE sia parallela alla AB, e sia eguale ad una data MN.

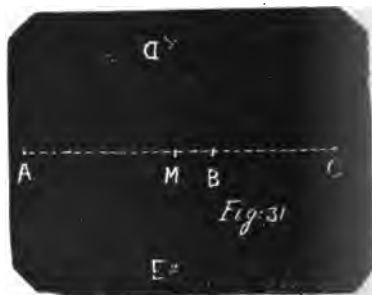
Fig. 30

Soluz. Trovato un punto D della parallela, che passa per C col metodo del Problema precedente (§ 80), sulla direzione di questa CD si ponga la MN sottraendola ad essa, se è minore (§ 72), o aggiungendola dall' altra parte (§ 73), o collocandola sopra essa da C verso D, se è maggiore (§ 74), secondochè richiederanno le condizioni del Problema.

Questa Soluzione non ha bisogno di dimostrazione.

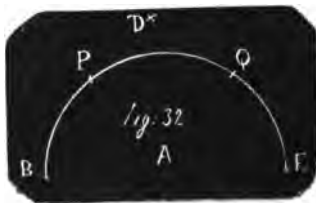
82. *Prob.* Esaminare se i tre punti A, B, C sono in linea retta (fig. 31).

Sol. Coi centri A e C, e con un raggio arbitrario, per esempio AC, si segnino due archi, che si taglino in D ed E. Si osservi, se sia $DB = ED$. Se ciò è; i tre punti A, B, C sono in linea retta. Altrimenti no.

Dim. Se è anche $DB = EB$, sarà l' angolo $DAB = EAB = \frac{1}{2}\, DAE$ (8, lib. I), a cagione dei lati eguali tra loro ne' due triangoli DAB, EAB. Ma nei triangoli DAC, EAC per la stessa cagione sono eguali gli angoli DAC, EAC, e però eguali ciascuno alla metà dell'angolo DAE. Dunque sarà $DAB = DAC$; e quindi i tre punti A, B, C in linea retta. Se poi DB sia maggiore o minore di EB; anche l'angolo DAB sarà maggiore o minore dell'angolo EAB (25, lib. I), e quindi non potrà essere eguale all' angolo DAC, non potendo essere eguale

alla metà dell'angolo DAE. Dunque i tre punti A, B, C non potranno essere in linea retta.

83. *Prob.* Dati i tre punti A, B, D esaminare se la DA sia perpendicolare ad AB (fig. 32).

Sol. Si duplichi la AB in E (§ 64) per via del semicircolo $BPQE$. Si osservi se sia $DB = DE$. Se lo è, l'angolo DAB è retto. Altrimenti non lo è.

fig. 32

Dim. Essendo retta la BAE diametro del cerchio; la DA farà con essa due angoli, la somma de' quali sarà eguale a due retti (13, lib. I). Ne' due triangoli poi DAE, DAB, che hanno i lati AE, AB eguali fra loro, e il lato AD comune, se il lato DE sarà eguale al lato DB; anche l'angolo DAE sarà eguale all'angolo DAB (8, lib. I), e però entrambi retti. Se poi DE sarà maggiore, o minore di DB; anche l'angolo DAE sarà maggiore o minore dell'angolo DAB; quindi uno sarà acuto, e l'altro ottuso (25, lib. I).

84. *Prob.* Esaminare se la retta, che passa per due punti dati D, F (fig. 33), sia perpendicolare alla retta, che passa per altri due punti dati A, B.

Sol. Per via del punto D si trovi la perpendicolare DE alla AB (§ 78). Si esamini, se i tre punti D, E, F sono in linea retta (§ 82). Se sì; la DF è perpendicolare alla AB; altrimenti no.

fig. 33

Dim. Poichè la DE è perpendicolare per costruzione; se lo è anche la DF, sarà la stessa retta; poichè da un punto D ad una retta AB non si possono condurre due perpendicolari (Coroll. Prop. 32, lib. I).

85. *Prob.* Dati due punti A, B d'una retta (fig. 34) e due C, D d'un'altra; esaminare se sieno parallele.

Sol. Si faccia ad $AD = AE$; a $BD = BE$ (§ 11). Si faccia pure ad $AC = AF$, a $BC = BF$. Si osservi, se sia $DE = CF$;

se ciò è; saranno parallele; se no; convergeranno dalla parte della minore.

Fig. 34

Dim. Le DE, CF sono perpendicolari alla AB, e sono tagliate per metà da essa in due punti M ed N (§ 14). Dunque sono duple rispettivamente delle distanze DM, CN dei punti D e C dalla retta AB. Se dunque saranno eguali, le distanze saranno eguali, e quindi le AB, DC parallele; altrimenti convergeranno.

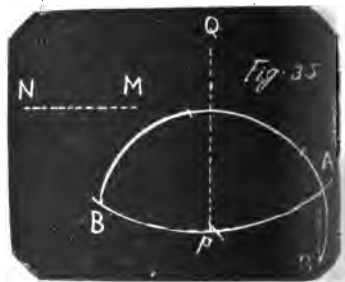
LIBRO QUINTO

DELLE DISTANZE PROPORZIONALI

86. *Prob.* Trovare una terza proporzionale alle due distanze Qp, MN (fig. 35), delle quali la prima Qp è maggiore della seconda MN.

Fig. 35

Sol. Col centro Q, e col raggio Qp si descriva un arco indefinito ApB. Col centro p, e col raggio MN si descriva la semicirconferenza BAS. Sarà AS la terza proporzionale.

Dim. Pel Lemma del § 22 sarà $AS \cdot pQ = (Ap)^2$. Dunque $AS \cdot pQ = (MN)^2$. Quindi (17, lib. VI) $pQ : MN :: MN : AS$.

87. Trovare una terza proporzionale alle due distanze Qp, MN (fig. 36), delle quali la prima è minore della seconda, ma però maggiore della metà di quella.

Avv. Ci accorgeremo, che la Qp sia maggiore della metà della MN, se i due circoli descritti coi centri Q e p, che sono gli estremi della prima distanza, e coi raggi Qp ed MN, che sono le due distanze date, si taglino tra loro come nella figura.

Sol. È la stessa, che la precedente applicata alla fig. 36.

Dim. È la stessa, che la precedente.

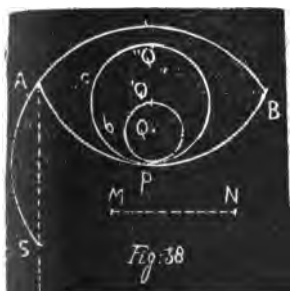
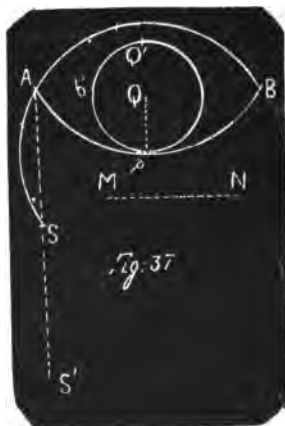
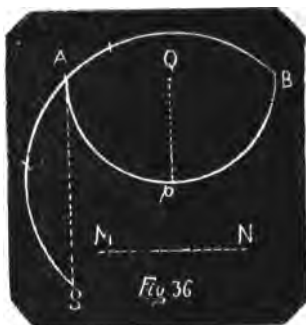
88. Se il circolo pbQ' descritto col centro Q, e col raggio Qp non si tagliasse in alcun punto col circolo descritto col centro p, e col raggio MN, come nella fig. 37; servirà il problema seguente.

89. *Prob.* Trovare una terza proporzionale alle due distanze (fig. 37) Qp, MN, delle quali la prima è minore della metà della seconda.

Sol. Col centro p, raggio MN si descriva un arco indefinito BAS. Col centro Q, raggio Qp si descriva la semicirconferenza pbQ' (§ 64). Col centro Q', raggio $Q'p$ si descriva un arco indefinito. Se quest'arco taglia l'arco BAS in due punti B ed A; si determini la semicirconferenza BAS' (§ 64). Col metodo dello stesso § 64 alla AS' si aggiunga in linea retta un'eguale $S'S$. Sarà AS la terza proporzionale cercata.

Dim. Si ha (§ 22) $AS' \,.\, pQ' = (Ap)^2 = (MN)^2$. Ma $pQ' = 2pQ$. Dunque $2AS' \,.\, pQ = (MN)^2$; ossia $AS \,.\, pQ = (MN)^2$. Quindi (17, lib. I) $pQ : MN :: MN : AS$.

90. Se nemmeno l'arco pcQ'' descritto col centro Q' (fig. 38), e col raggio $Q'p$ tagliasse l'arco BAS descritto col centro p, e col raggio MN; si determini la semicirconferenza pcQ''; col centro Q'', e col rag-

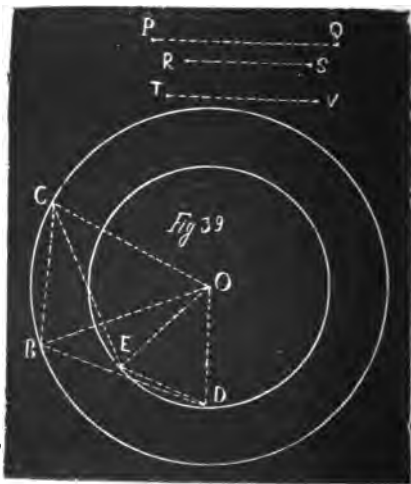
gio $Q''p$ si descriva un arco indefinito. Se questo taglia l'arco BAS in due punti A e B; si determini la semicirconferenza BAS' (§ 64). Si quadruplichi AS' (§ 65), e sia $AS=4AS'$. Sarà questa la terza proporzionale cercata.

Dim. Poichè si ha (§ 22) $AS'.pQ''=(Ap)^2=(MN)^2$. Quindi $4AS'.pQ=(MN)^2=AS.pQ$. Quindi (17, lib. VI) $pQ:MN::MN:AS$.

91. Nella stessa guisa si procederebbe oltre, se nemmeno la distanza $Q''p$ fosse maggiore della metà della MN; cioè si prenderebbe una distanza dupla di essa, e ottupla di Qp, e si ottuplicherebbe la AS', che ne venisse determinata. Questa distanza ottupla della AS' sarebbe la terza proporzionale cercata; e così via via.

La dimostrazione è come le precedenti.

92. Anche nel caso che la prima distanza Qp fosse bensì maggiore della metà della seconda MN, ma di poco, gioverà duplicarla, perchè le intersezioni de' due cerchj si facciano ad angoli non tanto acuti, ma più vicini al retto (§ 9).

93. Trovare la quarta proporzionale alle tre distanze PQ, RS, TV (fig. 39).

Sol. Con un medesimo centro O, e colle due prime distanze prese per raggi si descrivano due cerchj, cioè col raggio PQ il cerchio BC, e col raggio RS il cerchio DE. Colla terza distanza TV presa per raggio, e fatto centro in qualche punto B della prima circonferenza, si segni un arco, che la tagli in C. Con un raggio arbitrario fatto centro in B si segni un arco, che tagli la seconda circonferenza in D. Collo stesso raggio BD fatto centro in C si tagli la stessa circonferenza in un prossimo punto E. Sarà DE la quarta proporzionale.

Dim. A cagione dei lati eguali tra loro nei due triangoli COE, BOD si avrà l'angolo $COE = BOD$ (8, lib. I). E tolto da entrambi (o aggiunto) l'angolo BOE, si avrà l' angolo $COB = EOD$. Sarà dunque anche la somma degli angoli OCB, OBC eguale alla somma degli angoli OED, ODE (32, lib. I). Ma i due triangoli COB, EOD sono isosceli. Saranno dunque le due semisomme, ossia gli angoli alla base, eguali (5, lib. I). Quindi i triangoli saranno simili (4, lib. VI), e si avrà $CO : DO :: CB : DE$; ossia $PQ : RS :: TV : DE$.

94. *Avv. I.* Gioverà prendere il raggio arbitrario BD in guisa che l'angolo BDO riesca vicino al retto (§ 9), il che si può fare ad occhio.

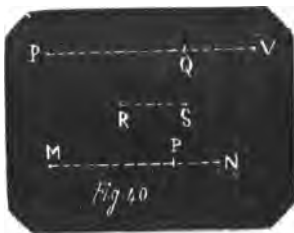
95. *Avv. II.* Se la terza distanza TV non si potesse collocare come corda in BC, il che avverrà, quando la TV sarà maggiore di due volte la PQ; converrà duplicare le due distanze PQ, RS (§ 64), e con esse così duplicate descrivere i due cerchj BC, DE, e fare tutto il resto come sopra (§ 93). Se ciò nemmeno bastasse, converrebbe triplicarle ecc. Gioverà pure duplicarle, o triplicarle ecc., quando la TV si potesse bensì applicare per corda al primo cerchio, ma essa fosse quasi eguale al diametro di quello; e ciò per ischivare le sezioni ad angoli acuti, e otteneme delle altre più vicine all'angolo retto.

Ciò resta dimostrato dall' essere $PQ : RS :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS$ ecc. Quindi avendosi fatto come $2PQ$ a $2RS$, ovvero come $3PQ$ a $3RS$ ecc., così BC a DE, sarà sempre come PQ ad RS; così BC a DE; cioè come PQ ad RS, così TV a DE (4, lib. V).

96. *Prob.* Dividere la MN in P in parti proporzionali alle due distanze date PQ, RS (fig. 40).

Sol. Alla PQ si aggiunga in linea retta la QV eguale alla RS (§ 73). Alle tre PV, MN, PQ si trovi la quarta proporzionale (§ 93), la quale si collochi sulla MN in MP, il che si fa sottraendola dalla MN (§ 72). Sarà fatto.

Fig. 40

Dim. Essendo $PV : MN :: PQ : MP$, sarà ancora $PV : MN :: QV : PN$ (5, lib. V). Sarà dunque PQ:

$MP :: QV : PN$. Quindi (16, lib. V) $PQ : QV :: MP : PN$; ossia $PQ : RS :: MP \cdot\cdot PN$.

97. *Prob*. Dividere la AB (fig. 41) in estrema e media ragione.

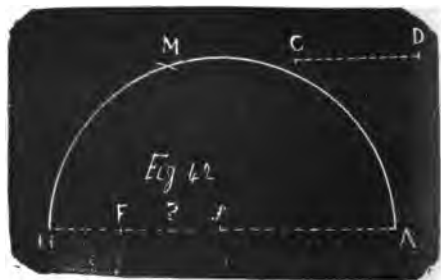
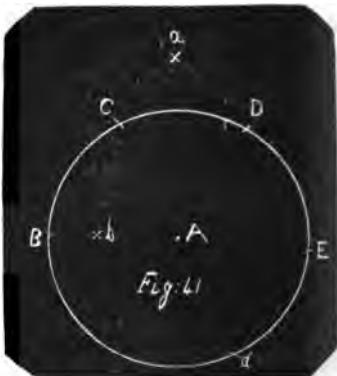
Sol. Col centro A, raggio AB si descriva il cerchio BDd. Si faccia nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Si faccia a $BD = Ba = Ea$. Si faccia ad $Aa = Db = db$. Sarà la AB divisa in b in estrema, e media ragione, e si avrà $BA : Ab :: Ab : bB$.

Dim. Vedi il § 46.

98. Anche quest' ultimo problema (§ 97) è uno di quelli, i quali si sciolgono molto più semplicemente col solo compasso, che col compasso e colla riga insieme, come si può vedere confrontando questa soluzione colle soluzioni geometriche conosciute. La dimostrazione tuttavia riesce più complicata.

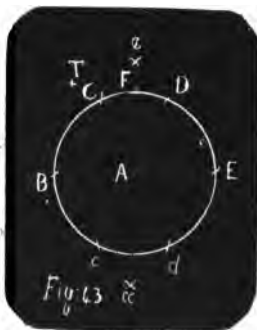
99. *Prob*. Tra le due distanze date AB e CD (fig. 42) trovare la media proporzionale.

Sol. Sulla AB si aggiunga ad essa la CD da B in H (§ 73). Si divida per metà la AH in f (§ 66). Alla BF si aggiunga in linea retta l'eguale BF (§ 64). Coi centri F, f, e col raggio fA si descrivano due cerchj, che si taglino in M. Sarà BM la media proporzionale.

Dim. Essendo i punti f, B, F sulla stessa retta HA, ed essendo eguali rispettivamente i lati dei due triangoli MBf, MBF, sarà l' angolo $MBf = MBF$ (8, lib. I), e però entrambi retti (13, lib. I). Sarà dunque la MB perpendicolare al diametro HA del semicerchio HMA. Quindi (13, lib. VI) $AB : BM :: BM : BH$, ossia $AB : BM :: BM : CD$.

LIBRO SESTO

DELLE RADICI

100. *Prob.* Trovare facilmente le radici dei numeri interi dall' uno fino al dieci (fig. 43), prendendo per unità la distanza AB.

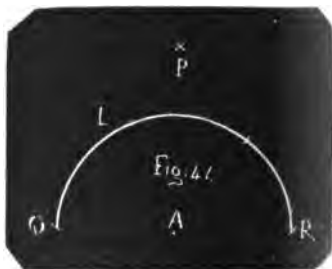
Sol. Col raggio AB si descriva il cerchio BDd; si faccia nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$. Coi centri B ed E, e col raggio BD si segnino degli archi, che si taglino in a, ed α. Collo stesso raggio BD, e coi centri D e d si segnino due archi, che si taglino in V. Col raggio Aa, e col centro B si tagli la circonferenza in F. Coi centri B ed F, e col raggio AB si segnino due archi, che si taglino in T. Si avrà

$AB = \sqrt{1}$	$aV = \sqrt{6}$
$Aa = \sqrt{2}$	$CV = \sqrt{7}$
$BD = \sqrt{3}$	$a\alpha = \sqrt{8}$
$BE = \sqrt{4}$	$BV = \sqrt{9}$
$ET = \sqrt{5}$	$TV = \sqrt{10}$

Dim. Si è dimostrato essere $(Aa)^2 = 2$ (§ 27). Dunque $Aa = \sqrt{2}$. Si è dimostrato essere $BD = \sqrt{3}$ (§ 2). Si ha poi $BE = 2 = \sqrt{4}$.

Avendo poi i due triangoli BTA, TAF i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $BTA = TAF$ (8, lib. I). Quindi BT parallela ad FA (28, lib. I), e però anche la BT si troverà perpendicolare a BA, come la FA (§ 27) (27, lib. I). Avendo poi il punto A e il punto E la stessa distanza dai punti D e d, così pure il punto B e il punto V; saranno i quattro punti B, A, E, V sulla stessa retta (§ 13), e sarà $EV = BA$ (§ 14). Sarà dunque $(ET)^2 = (TB)^2 + (BE)^2$ (47, lib. I) $= (AB)^2 + 4(AB)^2 = 5$; quindi $ET = \sqrt{5}$. Istessamente $(aV)^2 = (Aa)^2 + (AV)^2$. Ma essendo $EV = BA$; è ancora $AV = BE = 2AB$; quindi $(AV)^2 = 4(AB)^2 = 4$; ed è $(Aa)^2 = 2$ (§ 27).

Dunque $(aV)^2=6$; ed $aV=\sqrt{6}$. Confrontando poi i punti C, B, c, A, V coi punti A, p, B, P, Q della fig. 3, e fatte le sostituzioni nell'equazione $(AQ)^2=(Ap)^2+pQ\,.\,PQ$ (§ 18), si otterrà $(CV)^2=(CB)^2+BV\,.\,AV=1+3\,.\,2=7$. Quindi $CV=\sqrt{7}$. Essendo pure $Aa=A\alpha$ (§ 14); sarà $(a\alpha)^2=4(Aa)^2=8$. Quindi $a\alpha=\sqrt{8}$. Si ha poi $BV=3=\sqrt{9}$. Finalmente essendo $(TV)^2=(TB)^2+(BV)^2=1+9=10$; si ha $TV=\sqrt{10}$.

101. *Prob.* Per via delle radici trovate nel problema precedente (fig. 44), trovare le altre radici de' numeri interi dal 10 fino al 36.

Sol. Si sottragga il numero, del quale si vuole la radice, dal numero quadrato prossimamente maggiore, che sarà il 16, o il 25, o il 36. Colla radice del residuo, la quale si troverà nella lista del § 100, presa per raggio, e con un centro A si descriva la semicirconferenza QLR (§ 64). Colla radice del numero quadrato prossimamente maggiore presa per raggio, la quale si troverà col metodo del § 65, e coi centri Q ed R si descrivano due archi, che si taglino in P. Sarà AP la radice cercata.

Per esempio si voglia la radice del 29. Sottratto questo dal 36, lascia di residuo 7. Col raggio $CV=\sqrt{7}$ (§ 100) descritta la semicirconferenza QLR, e coi centri Q ed R, e col raggio $=6$ segnati due archi, che si taglino in P; sarà $AP=\sqrt{29}$.

Dim. Essendo retto l' angolo PAQ (§ 83); sarà $(PQ)^2=(AQ)^2+(AP)^2$ (47, lib. I). Quindi togliendo $(AQ)^2$, si avrà $(PQ)^2-(AQ)^2=(AP)^2$. Ora posto $(PQ)^2=36$ e $(AQ)^2$ eguale successivamente ai numeri interi dall' unità fino al 10, si avrà $(AP)^2$ eguale successivamente dal 36 in giù fino al 25. Dunque per AP si avranno successivamente le radici di questi numeri. La radice poi di 25 è 5, e si ha dal § 65. Posto $(PQ)^2=25$, si avranno collo stesso metodo le radici dal 25 in giù fino al 16, e posto $(PQ)^2=16$, si avranno le altre dal 16 in giù fino al 10.

Nell'esempio addotto si avrà $(PQ)^2-(AQ)^2=36-7=(AP)^2=29$. Quindi $AP=\sqrt{29}$.

102. *Prob.* Trovare le radici di tutti i numeri interi.

Sol. È chiaro, che adoperando lo stesso metodo del § 101 colle radici acquistate, con esso si potranno avere altre radici di numeri superiori, e con queste altre, e così successivamente sino in infinito. Abbiamo già dunque il modo di ottenere le radici di tutti i numeri interi.

103. *Prob.* Trovare la radice di qualunque numero rotto.

Sol. Si trovi la radice del denominatore (§ 102), poi quella del numeratore. Si faccia come la prima radice alla seconda, così l'unità ad una quarta proporzionale (§ 93). Sarà questa la radice cercata.

Dim. Poichè se il denominatore sia d; il numeratore sia n; se si farà $\sqrt{d} : \sqrt{n} :: 1$: quarta proporzionale; sarà questa quarta $= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}}$. Ma $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{n}{d}}$. Dunque ecc.

104. *Prob.* Trovare (fig. 45) facilmente la metà delle radic dei numeri interi dall' uno fino al venticinque.

Sol. Preso il raggio AB eguale ad uno, col centro A si descriva il cerchio BDd, e nella sua circonferenza si faccia ad $AB = BC = CD = = DE = Ed$.

Col centro B, e col raggio BD si descriva un arco, che passi pei punti a, N, D, d, n, α.

Collo stesso raggio, e col centro E si descriva un arco, che passi pei punti a, M, C, m, α.

Col raggio Aa, e col centro B si descriva un arco, che passi pei punti M, F, Q, q, m.

Collo stesso raggio, e col centro E si descriva un arco, che passi pei punti N, F, P, p, n.

Col raggio AB, e col centro B si descriva un arco, che passi per P e p.

Collo stesso raggio, e col centro E si descriva un arco, che passi per Q e q.

Collo stesso raggio, e col centro P si descriva un arco, che passi per R, e tagli la circonferenza in S; col centro p si segni un altro arco, che tagli il primo in R, e la circonferenza in s.

Collo stesso raggio, e coi centri Q, q si descrivan due archi, che si taglino in T, e taglino la circonferenza in O ed o.

Collo stesso raggio, e col centro α si tagli con un arco la circonferenza in g. Col centro R si tagli con un arco la circonferenza in L ed l. Coi centri O ed o si segnino due archi, che si taglino in H. Coi centri H e T si segnino due archi, che si taglino in V e v. Sarà

$RA = {}^1/_2\sqrt{1}$	$HF = {}^1/_2\sqrt{13}$
$RQ = {}^1/_2\sqrt{2}$	$EO = {}^1/_2\sqrt{14}$
$RD = {}^1/_2\sqrt{3}$	$Ll = {}^1/_2\sqrt{15}$
$RP = {}^1/_2\sqrt{4}$	$BE = {}^1/_2\sqrt{16}$
$RF = {}^1/_2\sqrt{5}$	$Ha = {}^1/_2\sqrt{17}$
$AM = {}^1/_2\sqrt{6}$	$HN = {}^1/_2\sqrt{18}$
$Qq = {}^1/_2\sqrt{7}$	$HD = {}^1/_2\sqrt{19}$
$Aa = {}^1/_2\sqrt{8}$	$ag = {}^1/_2\sqrt{20}$
$BR = {}^1/_2\sqrt{9}$	$dV = {}^1/_2\sqrt{21}$
$BL = {}^1/_2\sqrt{10}$	$HS = {}^1/_2\sqrt{22}$
$pS = {}^1/_2\sqrt{11}$	$Mm = {}^1/_2\sqrt{23}$
$BD = {}^1/_2\sqrt{12}$	$Mn = {}^1/_2\sqrt{24}$

$$HE = {}^1/_2\sqrt{25}.$$

Dim. Se si confrontino i punti P, B, p, R, E di questa figura coi punti A, p, B, P, Q della fig. 3 per mezzo dell'equazione del § 18 $(AQ)^2=(Ap)^2+pQ\,.\,PQ$, si otterrà l'equazione per questa figura $(PE)^2=(PB)^2+BE\,.\,RE$; ossia $(Aa)^2=(AB)^2+2AB\,.\,RE$; ossia (§ 27) $2=1+2RE$. Quindi $RE={}^1/_2\,AE$, e poichè R è sulla stessa retta BAE (§ 13), sarà anche $RA={}^1/_2\,AE={}^1/_2={}^1/_2\sqrt{1}$.

Essendo il punto T alla metà della AB per la stessa ra-

gione, colla quale si è dimostrato, che il punto R è alla metà della AE; sarà $AT=RE$, quindi confrontandosi i punti di questa fig. 45, Q, T, q, E, R coi punti A, q, B, Q, P della fig. 3, il punto A della fig. 45 sarà il punto p della fig. 3. Dunque dall'equazione del § 16, $(AQ)^2=(AP)^2+(PQ)^2+Pp\,.\,PQ$ si ricaverà per questa fig. 45 l'equazione $(QE)^2=(RQ)^2+(RE)^2+AR\,.\,RE$; ossia sostituendo i valori numerici $1=(RQ)^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Quindi $(RQ)^2=\frac{1}{4}\,.\,2$; $RQ={}^1/_2\sqrt{2}$.

Confrontando i punti D, A, d, E di questa figura 45, coi punti P, A, p, B della fig. 3, resterà dimostrato dal § 14, che le due AE, Dd si taglino vicendevolmente in due parti eguali. Ma la AE è tagliata in due parti eguali in R; dunque anche la Dd. Ma $Dd=BD=\sqrt{3}$ (§ 2). Dnnque $RD={}^1/_2\sqrt{3}$.

Si ritenga, che la DRd è anche perpendicolare alla AE (§ 14).

Si ha poi $RP=1$. Dunque $RP={}^1/_2\sqrt{4}$.

Essendo retto l'angolo FAR (§ 27); si ha $(RF)^2=(FA)^2+(AR)^2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$. Dunque $RF={}^1/_2\sqrt{5}$.

Essendo la base BAE del triangolo BME tagliata per metà della retta AM; si avrà pel § 26, $(BM)^2+(EM)^2=2(AB)^2+2(AM)^2$; cioè $(Aa)^2+(BD)^2=2(AB)^2+2(AM)^2$; cioè $2+3=2+2(AM)^2$. Quindi $6=4(AM)^2$; $\sqrt{6}=2AM$; $AM={}^1/_2\sqrt{6}$.

Essendosi confrontati qui sopra i punti Q, T, q, E, R, A di questa Fig. 45 coi punti A, q, B, Q, P, p della Fig. 3, risulterà dal § 13 essere in questa Fig. 45 $AQ=Aq=QR=Rq$. Per le stesse ragioni risulterà essere eguali tra loro, ed a queste quattro le quattro AP, Ap, PT, Tp. Avendo dunque i due triangoli isosceli PTA, QAR tutti i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $PAT=QRA$ (8, lib. I), ed essendo TAR retta, sarà PA parallela a QR (29, lib. I). Quindi anche PQ eguale e parallela alla AR (33, lib. 1).

Ma Qq è perpendicolare alla AR (§ 14). Dunque anche alla PQ (27, lib. I). Si hanno poi nei due triangoli PAT, RAq i due angoli PAT,RAq eguali (8, lib. I), e TAR retta. Dunque essendo eguali a due retti i due angoli PAT, PAR (13, lib. I),

lo saranno anche i due PAR, RAq. Quindi sarà retta anche la PAq, (14, lib. I). Dunque $(Pq)^2=(2RQ)^2=(PQ)^2+(Qq)^2$ (47, lib. I); cioè $2={}^1/_4+(Qq)^2$; quindi ${}^7/_4=(Qq)^2$, e $Qq={}^1/_2\sqrt{7}$.

Si ha poi $(Aa)^2=2$ (§ 27)$={}^8/_4$. Quindi $Aa=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}={}^1/_2\sqrt{8}$.

Sia pure $BR={}^3/_2={}^1/_2\sqrt{9}$.

Se si confrontino i punti B, L, R, l, A di questa Fig. 45 coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3; dall'equazione $(AQ)^2=(AP)^2+(PQ)^2+Pp\,.\,PQ$ del § 16 si ricaverà l' equazione per questa Figura 45 $(BL)^2=(LA)^2+(AB)^2+AR\,.\,AB$; ossia $(BL)^2=1+1+{}^1/_2={}^{10}/_4$. Quindi $BL={}^1/_2\sqrt{10}$.

I due triangoli PSA, PBA hanno i lati rispettivamente eguali. Dunque si ha l'angolo $SPA=PAB$ (8, lib. I). Quindi sono parallele le PS, BA (28, lib. I). Ma la Pp taglia ad angoli retti la BR (§ 14). Dunque sarà perpendicolare anche alla PS (27, lib. I). Nella stessa maniera poi, che si è dimostrato essere $(Qq)^2={}^7/_4$, si dimostrerà pure essere $(Pp)^2={}^7/_4$. Quindi avendosi $(pS)^2=(Pp)^2+(PS)^2$ (47, lib. I); si avrà $(pS)^2={}^7/_4+1={}^{11}/_4$; quindi $pS={}^1/_2\sqrt{11}$.

Si ha poi $(BD)^2=3$ (§ 2)$={}^{12}/_4$. Quindi $BD={}^1/_2\sqrt{12}$.

Si ha pure $(HF)^2=(HA)^2+(AF)^2$; e dimostrandosi la QO parallela alla BE nella stessa guisa, che si è dimostrato della PS; saranno i punti O, P, Q, S nella stessa retta, e $PO=QO-PQ=1-{}^1/_2={}^1/_2=PQ$. Essendo dunque OP eguale e parallela tanto alla TA, quanto alla TB; saranno eguali e parallele anche le OT, PA; e le due OB, PT fra loro (33, lib. I). Ma si è dimostrato qui sopra essere $PT=PA$. Dunque sarà anche a queste $=OT=OB$. Per la stessa ragione dall'altra parte le oT, oB saranno eguali alla $pA=PA$. Se ora si confrontino i punti O, o, A, T, B, H coi punti A, B, Q, P, p, q della Fig. 3, si ricaverà dal § 14 essere $HB=AT={}^1/_2$. Sarà dunque $(HA)^2=({}^3/_2)^2={}^9/_4$; quindi $(HF)^2={}^9/_4+1={}^{13}/_4$ e $HF={}^1/_2\sqrt{13}$.

Se si confrontino i punti E, O, H, o, A coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3; dall'equazione $(AQ)^2=(AP)^2+(PQ)^2+Pp\,.\,PQ$ del § 16, si ricaverà per questa Figura $(EO)^2=(OA)^2+(AE)^2+HA\,.\,AE=1+1+{}^3/_2={}^7/_2={}^{14}/_4$. Quindi $EO={}^1/_2\sqrt{14}$.

In seguito se si confrontino i punti A, R, L, Q, q, l di questa Fig. 45 coi punti A, B, Q, P, p, q della fig. 3, aven-

dosi (§ 15) l'equazione per la fig. 3, $(QM)^2=(AQ)^2-(AM)^2$, e moltiplicando per 4, $4(QM)^2=4(AQ)^2-4(AM)^2$, ossia $(Qq)^2=4(AQ)^2-(AB)^2$; si ricaverà per questa Fig. 45, $(Ll)^2=4(AL)^2-(AR)^2=4-{}^1/_4={}^{15}/_4$, quindi risulta $Ll={}^1/_2\sqrt{15}$.

Si ha poi $BE=2={}^1/_2 \, . \, 4={}^1/_2\sqrt{16}$.

Per l'angolo retto aAH (§ 27, si ha $(Ha)^2=(HA)^2+(Aa)^2=({}^3/_2)^2+2={}^{17}/_4$; quindi $Ha={}^1/_2\sqrt{17}$.

Dimostrandosi nella stessa guisa essere $(AN)^2={}^3/_2$, come si è dimostrato di $(AM)^2$; così pure $(An)^2={}^3/_2$; a cagione che NR taglia per metà la base AE del triangolo ANE, si avrà (§ 26) $(AN)^2+(NE)^2=2(AR)^2+2(RN)^2$; cioè ${}^3/_2+2={}^2/_4+2(RN)^2$; e riducendo si trova $(RN)^2={}^3/_2=(AN)^2$. Egualmente si trova $(Rn)^2={}^3/_2$. Se ora si confrontano i punti H, N, R, n, A di questa Figura 45 coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3; dall'equazione $(AQ)^2=(AP)^2+(PQ)^2+Pp \, . \, PQ$ del § 16, si ricaverà per la Figura 45 l'equazione $(HN)^2=(AN)^2+(AH)^2+AR \, . \, AH$, cioè $(HN)^2={}^3/_2+{}^9/_4+{}^3/_4={}^{18}/_4$. Quindi risulta $HN={}^1/_2\sqrt{18}$.

Essendo la DR perpendicolare alla AE, cioè alla HR; sarà $(HD)^2=(HR)^2+(RD)^2$ (47, lib. I)$=4+{}^3/_4={}^{19}/_4$; quindi $HD={}^1/_2\sqrt{19}$.

Essendo la base $aA\alpha$ dei triangolo $ag\alpha$ tagliata per mezzo della retta gA; si avrà (§ 26) $(ag)^2+(\alpha g)^2=2(Aa)^2+2(Ag)^2$; ossia $(ag)^2+1=4+2$; e $(ag)^2=5={}^{20}/_4$; quindi $ag={}^1/_2\sqrt{20}$.

Essendo i due triangoli HTV, AED di lati eguali tra loro; quindi l'angolo $VTH=DEA$ (8, lib. I), ed essendo i punti H, T, A, E sulla stessa retta; sarà la VT parallela alla sua eguale DE (29, lib. I) quindi anche la VD parallela ed eguale alla TE (33, lib. I). Ma la Dd è perpendicolare alla AE, cioè alla TE; dunque anche alla VD (27, lib. I). Quindi $(dV)^2=(VD)^2+(Dd)^2=(TE)^2+(BD)^2=({}^3/_2)^2+3$ (§ 2)$={}^9/_4+{}^{12}/_4={}^{21}/_4$; quindi $dV={}^1/_2\sqrt{21}$.

Essendosi dimostrata la PS eguale e parallela alla AE; così la ps per la stessa ragione; sarà anche la SE eguale e parallela alla AP (33, lib. I); così la sE alla Ap. Per l'eguaglianza e parallelismo delle tre PS, TR, ps si proverà istessamente l'eguaglianza delle RS, Rs alla PT, pT entrambe dimostrate eguali alla $AP=RQ$. Confrontando ora i punti H, S, E, s, R di questa Figura coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3,

dall'equazione $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \,.\, PQ$ (§ 18) si ricaverà per questa Fig. 45, $(HS)^2=(SE)^2+EH \,.\, RH=(RQ)^2+EH \,.\, RH={}^2/_4 + {}^5/_2 \,.\, 2={}^{22}/_4$. Quindi $HS={}^1/_2\sqrt{22}$.

Essendo la base AE del triangolo AME divisa per metà dalla MR, si avrà (§ 26) $(AM)^2+(EM)^2=2(RA)^2+2(RM)^2$; cioè ${}^6/_4+3={}^2/_4+2\,(RM)^2$. Quindi riducendo risulta $(RM)^2=2=(BM)^2=(Bm)^2$; del qual valore si dimostra nella stessa guisa essere $(Rm)^2$. Quindi $BM= MR = Rm = mB$. Se ora si confrontano i quattro punti B, M, R, m di questa Figura coi quattro punti A, Q, B, q della Fig. 3; avendosi dal § 15, $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$, e quindi $4(QM)^2=4(AQ)^2-4(AM)^2$, cioè $(Qq)^2=4(AQ)^2-(AB)^2$; si avrà per questa fig. 45, $(Mm)^2=4(BM)^2-(BR)^2=8-({}^3/_2)^2={}^{32}/_4-{}^9/_4={}^{23}/_4$; quindi $Mm={}^1/_2\sqrt{23}$.

Essendo i triangoli BME, BnE di lati eguali tra loro, ed avendo entrambi la base comune BE divisa in due egualmente dalle AM, An; dall'equazione del § 26 risulterà lo stesso valore per le due AM, An. Avendo dunque i triangoli BAM, EAn i lati tra loro eguali, sarà l'angolo $BAM=EAn$ (8, lib. I). Quindi a cagione della retta BAE essendo la somma dei due angoli MAB, MAE eguale a due retti (13, lib. I), sostituendo all'angolo MAB il suo eguale EAn, sarà anche la somma dei due angoli MAE, EAn eguale a due retti. Quindi le due MA, An faranno una sola retta (14, lib. I). Sarà dunque $(Mn)^2=4(AM)^2={}^{24}/_4$. Quindi $Mn={}^1/_2\sqrt{24}$.

Finalmente $HE={}^5/_2={}^1/_2\sqrt{25}$.

105. Essendo ${}^1/_2\sqrt{n} = \sqrt{{}^n/_4}$; per esempio ${}^1/_2\sqrt{7} = \sqrt{{}^7/_4}$ ecc., si avranno facilmente da questo Problema le radici di tutti i quarti dall'un quarto fino al venticinque quarti; il che sarà di uso nella costruzione delle Figure simili, come vedremo.

106. Se si fosse preso il raggio $AB = 2$; si sarebbero ottenute tutte queste distanze doppie di valore; quindi avremmo avute le radici intere dei numeri dall' uno fino al venticinque. Si potrebbe però facilmente raddoppiare qualunque di quelle mezze radici, che si volesse, per avere l'intera (§ 64).

107. La facilità di questa costruzione, che si eseguisce coi soli tre compassi delle tre aperture già osservate (§ 35) la prima $= \sqrt{1}$, la terza $= \sqrt{2}$, la seconda $= \sqrt{3}$, coi quali si è già diviso il cerchio in 24 parti eguali, ed ora si sono trovate 25

radici successive dei primi numeri; mostra l'eccellenza della Geometria del Compasso, e quanto possa servire alla perfezione delle Arti.

108. Nella costruzione precedente si ha avuto riguardo ad impiegare più che fosse possibile il primo compasso di apertura $=1$, col quale si è descritta la circonferenza BDd, il quale conservando l'apertura fondamentale, merita più degli altri fiducia. Così pure non si è voluto impiegare che i tre primi compassi più rimarcabili (§ 107). Ciò ha fatto, che alcune poche sezioni degli archi sono riuscite di angoli alquanto acuti, come quelle dei punti S, s, O, o e più quelle dei punti L ed l. Chi volesse avere tutti gli angoli d'intersezione più vicini all'angolo retto si potrà servire della seguente

Altra costruzione della fig. 45.

109. Trovati come nella soluzione del § 104 i punti M ed m; col raggio BD, e coi centri M ed m si descrivano due archi, che si taglino in H.

Col raggio AB, e col centro H si descriva un arco, che tagli la circonferenza in O ed o. Collo stesso raggio si determino le semicirconferenze OEs, oES (§ 64).

Col raggio BE, e col centro H si tagli la circonferenza in L ed l.

Tutti gli altri punti della figura si trovino come al § 104.

Dimostreremo, che i punti, che si trovano con questa costruzione, sono gli stessi dell'altra.

Essendosi dimostrato (§ 104), che $BM=MR=Rm=mB$, e che i tre punti B, A, R sono nella stessa retta; essendo anche $MH=ME=mH=mE$ per costruzione; H sarà sulla stessa retta BAR (§ 13), e si avrà $HB=RE$ (§ 14). Dunque H sarà lo stesso punto, che nell' altra costruzione. Essendo poi eguali le HO, Ho nelle due costruzioni; anche i punti O, o saranno gli stessi. Se si sottrae l'arco osE dalle due semicirconferenze BsE, oES; si avranno gli archi residui Bo, ES eguali. Quindi $ES=Bo=$ $=BO=AQ=RQ$. Quindi anche il punto S sarà il medesimo che prima. Egualmente lo sarà il punto s. Essendo poi la base HTR del triangolo HLR divisa in due egualmente dalla LT; si avrà (§ 26) $(HL)^2+(LR)^2=2(HT)^2+2(TL)^2$; cioè $4+(LR)^2=2+2(TL)^2$, cioè $2+(LR)^2=2(TL)^2$. Ma essendo ancora la base TR del trian-

golo TLR diviso per metà in A dalla retta LA: si avrà (§ 26) $(TL)^2+(LR)^2=2(TA)^2+2(AL)^2$, e duplicando: $2(TL)^2+2(LR)^2=4(TA)^2+4(AL)^2=1+4=5$; quindi sottraendo $2(LR)^2$, si ha $2(TL)^2=5-2(LR)^2$. Ma si è trovato più sopra $2(TL)^2=2+(LR)^2$. Dunque $5-2(LR)^2=2+(LR)^2$. E sottraendo 2 e aggiungendo $2(LR)^2$ si ha $3=3(LR)^2$; quindi $1=(LR)^2=(AB)^2$. Sarà dunque $LR=AB$ come nella prima costruzione. Lo stesso si proverà di [illegible]. Gli altri punti sono determinati come prima. Dunque tutti i punti della figura sono gli stessi di prima.

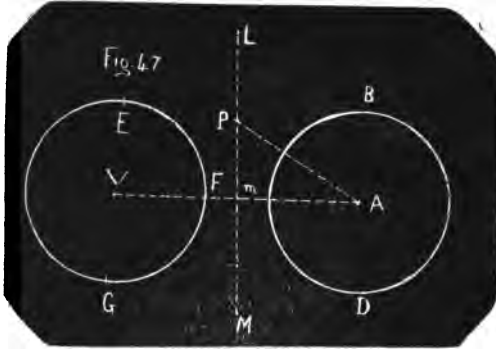
LIBRO SETTIMO

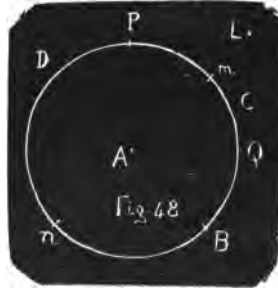
DELLA INTERSEZIONE DELLE RETTE COGLI ARCHI DI CERCHIO E TRA LORO

110. Dati due punti L ed M (fig. 46) d'una retta, e il centro A col raggio AB d'un arco BCD: trovare i due punti P e Q, nei quali la LM taglia il detto arco, se pure lo taglia.

Sol. Coi due punti L ed M dati nella retta presi per centri, e colle rispettive loro distanze MA, LA dal dato centro presi per raggi si descrivano due archi, che si taglino in V. Col centro V, e col dato raggio AB si descriva un arco indefinito EFG. Se questo taglia l'arco dato in P e Q, questi due punti saranno i cercati. Se non lo tagliasse, nemmeno la retta LM taglierebbe l'arco dato.

Dim. Essendo eguali tra loro le quattro distanze AP, AQ, VP, VQ, e le due tra loro, AM, VM; i tre punti P, M, Q saranno nella stessa retta (§ 13). Nella stessa guisa si dimostra, che sono nella stessa retta i tre punti Q, P, L. Dunque la retta LM passa per P e Q, quando questi punti d'intersezione vi siano.

Se il cerchio *EFG* descritto col raggio *AB* (fig. 47) e col centro *V* non tagliasse il cerchio *BCD*; la *LM* non taglierebbe questo stesso cerchio. Poichè se si concepisca la retta *VA*, che tagli i cerchj in *C* ed *F*; divisa per metà la *CF* in *m*; sarà *Vm* $=mA$. Dunque la *LM* taglierà perpendicolarmente la *VA* in *m* (§ 14) fuori del cerchio *BCD*. Se si piglia un qualunque altro punto *P* nella retta *LM*; nel triangolo rettangolo *Pm* si avrà il lato *PA* maggiore di *mA*, perchè opposto ad un angolo maggiore (32 e 18, lib. I). Sarà dunque molto più fuori del circolo il punto *P* del punto *m*. Dunque in nissun punto la retta *LM* taglierà il circolo *BCD*.

111. *Prob.* Dato un arco *BCD* descritto col centro *A* (fig. 48); trovare i due punti, dove taglia la circonferenza la retta, che passa per *A* e per un altro punto dato *L*.

Sol. Col centro *L*, e con un raggio arbitrario *LP* si descriva un arco, che tagli l'arco *BCD* in *P* e *Q*. Si divida l'arco *PQ* per metà im *m* (§ 60). Si determini la semicirconferenza *mDn* (§ 64). Saranno *m* ed *n* i due punti cercati.

Dim. Essendo nella stessa distanza dai due punti *P* e *Q* i tre punti *A*, *m* ed *L*, saranno nella stessa retta (§ 13). Ma nella retta *mA* si trova anche il punto *n* estremo del diametro *mn* (15, lib. IV), Dunque ecc.

112. *Prob.* Dati due punti *A*, *B* d'una retta (fig. 49 e 50), e due punti *C*, *D* d'una altra; trovare il punto *S* dove si tagliano.

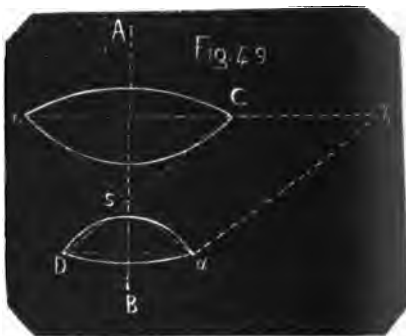
Sol. Coi due punti d'una delle due rette, per esempio coi

punti *A* e *B* presi per centri, e colle distanze rispettive di essi punti *AC, AD*; *BC, BD* dai due punti dell'altra retta *C, D* prese per raggi, si descrivano quattro archi, due dei quali si tagliano in *C* e *c*, e due in *D* e *d*.

Si trovi il quarto punto δ del parallelogrammo *CDd*δ col fare a *Dd*=*C*δ; a *DC*=*d*δ (§ 11).

Si trovi la quarta proporzionale alle tre *c*δ, *CD*, *Cc*.

Con questa presa per raggio, e coi centri *C* e *c* si descrivano due archi, che si taglino in S. Sarà *S* il punto dell'intersezione delle due rette *AB*, *CD*.

Dim. Le rette *AB*, *Cc* saranno pendicolari una all'altra (§ 13, 14); così pure le *AS, Cc*. Dunque il punto *S* sarà nella stessa *AB*. Essendo poi la *AB*, ossia *AS* perpendicolare anche alla *Dd* (§ 13, 14), sarà la stessa *Dd* parallela alla *Cc* (29, lib. I). Ma pei lati eguali tra loro nei due triangoli *dC*δ, *dCD* si hanno gli angoli *dC*δ, *CdD* eguali (8, lib. I). Dunque sono parallele anche le due *C*δ, *Dd* (28, lib. I). Dunque i punti *c, C,* δ sono nella stessa retta. Ora a cagione dei due lati eguali nei due triangoli *CBA, cBA* si avranno eguali gli angoli *CBA*, *cBA* (8, lib. I). Per la stessa ragione nei triangoli *ABD, ABd* si trovano eguali gli angoli *ABD, ABd.* Dunque nella Figura 49 l'angolo *cBd*, che è la somma dei due *cBA*, *ABd*, sarà eguale all'angolo *CBD*, somma dei due *CBA*, *ABD*. Nella Figura 50 poi l'angolo *cBd*, che è la differenza dei due *ABd, cBA,* sarà pure eguale all'angolo *CBD*, che è la differenza dei due *ABD, CBA*. In tutte due le Figure adunque nei due triangoli *cBd*, *CBD*, che hanno due

lati e l'angolo compreso eguale, sarà il terzo lato *cd* eguale al terzo *CD* (4, lib. I). Ma $CD = d\delta$. Dunque il triangolo $cd\delta$ è isoscele. È poi isoscele anche il triangolo *cCS*, e si ha la proporzione: la $c\delta$ alla *CD*, ovvero alla $d\delta$, come la *Cc* alla *CS*; onde viene ancora $c\delta : cd :: cC : cS$. Dunque i due triangoli $c\delta d$, *cCS* hanno gli angoli eguali tra loro (5, lib. VI). Quindi essendo l' angolo $c\delta d = cCS$; sarà la *CS* parallela alla δd (29, lib. I), alla quale essendo pur parallela la *CD*, sarà in essa il punto *S*. Dunque ecc.

LIBRO OTTAVO

DELLA COSTRUZIONE, MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE DEGLI ANGOLI E DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE

113. *Avv.* Quando noi diremo: *costruire un angolo abc col compasso* (fig. 51), intendiremo di dire: *trovare col compasso tre punti a, b, c; ovvero dato, alcuno di essi, trovare gli altri in guisa che volendo poi guidare per due di essi a, b una retta, e per uno di essi due b e pel terzo c un' altra retta; si abbia un angolo abc della quantità che si vuole.* Benchè l' angolo *abc* non sia veramente costrutto, se non quando si sono guidate attualmente le rette *ab*, *bc*, per tirare le quali non può bastare il compasso solo; non ostante per brevità adopreremo spesso la prima frase, intendendo, che equivalga nel sentimento alla seconda.

114. *Prob.* Essendo dato un angolo *ABC* per via dei tre punti *A*, *B*, *C* (fig. 51), e dati due altri punti *b* ed *a*; trovare un punto *c*, cosicchè l'angolo *abc* sia eguale ad *ABC*.

Sol. Trovata (§ 93) una quarta proporzionale alle tre distanze *AB*, *ab*, *BC*, con questa presa per raggio, e col centro *b* si descriva un arco, che passi per *c*. Trovata pure una quarta proporzionale alle tre *AB*, *ab*, *AC*, con essa per raggio, e col

centro a si descriva un altro arco, che tagli il primo in c. Sarà l'angolo $abc=ABC$.

Dim. Poichè i due triangoli ABC, abc hanno i lati proporzionali, avranno eguali gli angoli opposti ai lati proporzionali (5, lib. VI).

115. Servirà adunque la soluzione del Problema precedente (§ 114) a sciogliere anche il problema: Dati i tre punti (fig. 51) A, B, C estremi agli angoli di un triangolo, e due a, b estremi di un altro, trovare il terzo estremo c in guisa, che il triangolo abc riesca simile al triangolo ABC.

116. *Prob.* Duplicare, triplicare, quadruplicare ecc. (fig. 52) un angolo dato BAC (§ 113).

Sol. Col centro A, e coi raggi AB, AC si descrivano due archi indefiniti BDF, CE. Si faccia a $CB=CD$. Sarà l'angolo BAD duplo di BAC.

Si faccia a $CD=DE$. Sarà l'angolo BAE triplo di BAC.

Si faccia a $DE=EF$. Sarà BAF quadruplo di BAC ecc.

Per quadruplicarlo si poteva ancora fare a $BD=DF$.

Dim. Avendo i triangoli BAC, CAD, DAE, EAF, ecc. tutti i lati rispettivamente eguali, saranno eguali gli angoli BAC, CAD, DAE, EAF, ecc. (8, lib. I). Dunque ecc. Quindi essendo l'angolo $BAD=DAF$, sarà anche $BD=DF$ (4, lib. I).

117. *Prob.* Esaminare se l'angolo BAG (fig. 53) dato per via dei tre punti B, A, G sia semiretto.

Sol. Col raggio AB, centro A si descriva la semicirconfarenza BFE (§ 64). Si faccia a $GB=GF$ (§ 10). Se sarà $BF=FE$; l'angolo BAG sarà semiretto. Se sarà BF minore o maggiore di FE; l'angolo BAG sarà minore o maggiore di un semiretto.

Dim. Poichè l'angolo BAF è duplo dell'angolo BAG (§ 116); se l'angolo BAG è semiretto, sarà retto BAF; quindi $BF=FE$ (§ 83). Altrimenti se BAG è minore o maggiore di un semi-

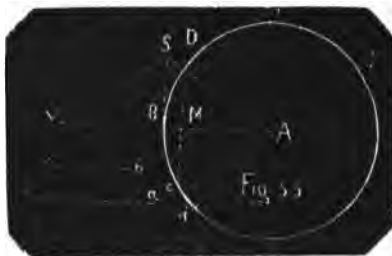
retto, sarà BAF minore o maggiore di un retto; quindi BF minore o maggiore di FE (24, lib. I).

118. *Prob.* Dividere per metà l'angolo BAC (fig. 54) dato pei tre soli punti B, A, C nei quali A è disugualmente lontano da B e da C.

Sol. Col centro A, raggio AB sia descritto l'arco BMD. Si faccia a $CB = CD$. Si divida l'arco BMD per metà in M (§ 60). Si divida l'arco BM per metà in N. Sarà l'angolo BAN la metà dell'angolo BAC.

Dim. Essendo l'angolo BAD duplo di BAC (§ 116) e duplo parimente di BAM (33, lib. VI); sarà l'angolo BAC lo stesso che BAM. Ma l'angolo BAN è la metà di BAM. Dunqne ecc.

119. *Prob.* Dato l'arco BC (fig. 55) descritto col centro A, trovare il suo seno, il coseno, la tangente e la secante.

Sol. Nella circonferenza descritta col raggio AB si faccia a $BC = Bc$. Si divida per metà la Cc in M (§ 66). Sarà CM il seno, MA il coseno.

Col centro M, raggio MA si descriva un arco, che tagli, se può, la circonferenza in D e d. Si determini la semicirconferenza $dD\delta$ (§ 64). Per lo stesso § si aggiunga alla BA la sua eguale BV. Coi centri A e V, e col raggio $D\delta$ si descrivano due archi, che si taglino in S. Sarà BS la tangente, SA la secante.

Dim. La BA taglia la Cc ad angoli retti per metà in M (§ 14). Dunque CM è il seno, MA è il coseno dell'arco BC. La SB è perpendicolare alla AB (§ 83). La $D\delta$ è terza proporzionale alle due AM, AC (§ 87); quindi anche la sua eguale AS. Dunque nei due triangoli rettangoli AMC, ABS si ha la proporzione $AM : AC :: AB : AS$, ed invertendo (4, lib. V) $AC : AM :: AS : AB$. Quindi (35, lib. V) $(AC)^2 : (AM)^2 :: (AS)^2 : (AB)^2$. E sostituendo ad $(AC)^2$ e ad $(AS)^2$ i loro valori tratti dalla 47, lib. I, si avrà $(AM)^2 + (MC)^2 : (AM)^2 :: (AB)^2 + (BS)^2 :: (AB)^2$.

Quindi (17, lib. V) $(MC)^2 : (AM)^2 :: (BS)^2 : (AB)^2$. Quindi (34, lib. V) $MC : AM :: BS : AB$. Quindi anche i lati MC, BS sono proporzionali. Si avrà dunque l'angolo MCA lo stesso che BSA (5, lib. VI). Quindi i punti A, C, S saranno nella stessa retta, e BS sarà la tangente ed AS la secante dell'arco BC.

Se il cerchio descritto col centro M, raggio MA, non tagliasse la circonferenza, o la tagliasse ad angoli troppo acuti, converrebbe ricorrere al § 89 o ai §§ 90 e 91.

Altra Sol. per aver la tangente e la secante. Si determini la semicirconferenza BCE (fig. 56) (§ 64). Col raggio BC, centro E si tagli questa in Q. Col raggio CQ, e coi centri A e B si segnino due archi, che si taglino in V. Collo stesso raggio CQ, centro V si tagli la circonferenza in e. Col raggio Ee, e coi centri A e B si segnino due archi, che si taglino in m. Collo stesso raggio Ee, centro m si descriva la semicirconferenza ABS (§ 64). Sarà SB la tangente, SA la secante.

Fig. 56

Dim. Se sia l'arco BCF eguale al al quadrante$=FE$; per essere $BC=QE$; sarà anche $CF=FQ$. Sarà poi per le definizioni trigonometriche il seno dell'arco CF la stessa cosa, che il coseno dell'arco BC. La corda poi dell'arco CFQ, doppio dell'arco CF, sarà doppia del seno dell'arco CF, ossia del coseno dell'arco BC. Questa corda è $CQ=AV$. Si ha poi (§ 22) $AV . Ee=(AB)^2$. Per essere poi retta la AmS (§ 64) $= 2Ee$ e $AV = 2 \cos BC$; si avrà $2Ee . \cos BC = (AB)^2 = AS . \cos BC$. Quindi $\cos BC : AB :: AB : AS$ (17, lib. VI). Sarà dunque AS terza proporzionale al coseno ed al raggio; e però sarà eguale alla secante, secondo le dimostrazioni trigonometriche. È poi retto l'angolo ABS (31, lib. III). Sarà dunque AS la secante nella sua posizione, e quindi BS la tangente.

120. *Prob.* Dato il seno mn (fig. 57) d'un arco d'un raggio dato AB, trovare quest'arco.

Sol. Descritto il cerchio CcK col raggio AB, si trovi una dupla della mn (§ 64). Con essa presa per raggio, e fatto centro

in qualche punto C della circonferenza si descriva un arco, che la tagli in c. Si divida l' arco Cc per metà in B (§ 60). Sarà BC l'arco cercato.

Dim. Il seno dell'arco BC per la definizione trigonometrica è la metà della corda dell' arco doppio di BC. Dunque ecc.

121. *Prob.* Dato il coseno $m\,a$ (fig. 57) d' un arco di un raggio dato AB, trovare quest'arco.

Sol. Descritto il cerchio $C\,c\,K$ col raggio AB si trovi una dupla della $m\;a$ (§ 64). Fatto centro in qualche punto c della circonferenza con questa dupla presa per raggio si tagli la circonferenza in K. Si determini la semicirconferenza KcC (§ 64). Si divida per metà l'arco Cc in B (§ 60). Sarà BC l'arco cercato.

Dim. Sia guidata l' altra corda Cc. Essa sarà divisa per metà in M ad angoli retti dal raggio AB (§ 14). Ma anche l'angolo CcK è retto (31, lib. III), essendo nel semicerchio CcK. Dunque i due triangoli CMA, CcK, che hanno un angolo comune in C e l'altro retto, sono equiangoli tra loro (32, lib. I), e si ha (4, lib. VI) $CM : Cc :: MA : cK$. Ma CM è la metà di Cc. Dunque $MA = {}^1/_2\, cK = m\,a$. È poi MA il coseno dell'arco BC. Dunque ecc.

122. *Prob.* Data la tangente $s\,b$ di un arco di raggio dato AB (fig. 55), trovare quest'arco.

Sol. Descritto col raggio AB il cerchio $BC\delta$; alla AB si ponga in B perpendicolare la $BS = b\,s$ (§ 76). Si trovi il punto C, dove la SA taglia la circonferenza (§ 111). Sarà BC l'arco cercato.

Questa Soluzione non ha bisogno di dimostrazione.

123. *Prob.* Data la secante $s\,a$ di un arco di raggio dato AB (fig. 55), trovare quest'arco.

Sol. Descritta col raggio AB la circonferenza $BC\delta$, e posta sulla AB l'eguale BV (§ 64), coi centri A e V, e col raggio $s\,a$ si descrivano due archi, che si taglino in S. Si trovi il punto C, dove la SA taglia la circonferenza (§ 111). Sarà BC l'arco cercato.

Dim. La *SB* sarà perpendicolare alla *BA* (§ 83); dunquc sarà la tangente dell'arco *BC*, e quindi *SA* la secante.

LIBRO NONO

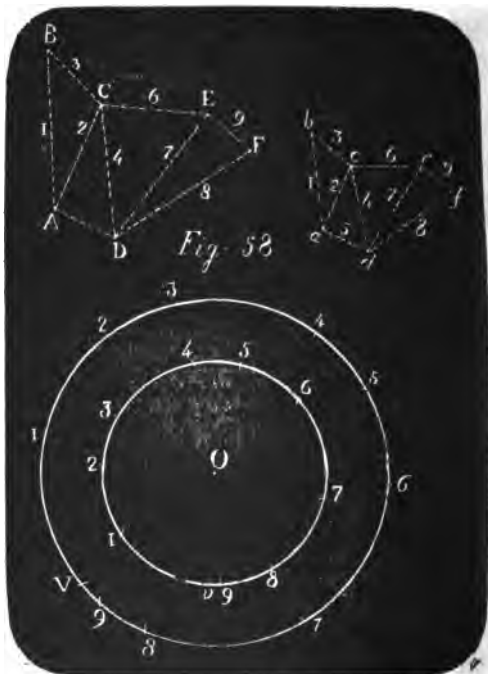
DELLE FIGURE SIMILI E DEI POLIGONI REGOLARI

124. *Avv.* Quando diremo: *costruire una figura o un poligono,* intendiremo di dire: *trovare tutti que' punti, che bastano a determinare la posizione e la grandezza di quelle rette, che si devono guidare per costruire interamente il poligono.*

125. *Prob.* Sopra un dato lato *a b* (fig. 51) costruire un triangolo simile a un dato triangolo *ABC.*

Sol. Vedi il § 115.

126. *Prob.* Costrnire una figura simile ad una data (fig. 58) *ABCEFD*, che abbia un dato rapporto di area con essa.

Sol. Si voglia per esempio, che la nuova figura abbia due quinti di area della figura data. Con un raggio *AB*, il maggiore che si possa comodamente, si costruisca la figura 43 (§ 100). Presa da essa figura la $Aa = \sqrt{2}$ per raggio, e fatto centro in *O* (fig. 58), si descriva il cerchio minore, nella di cui circonferenza è il punto *v.* Presa dalla fig. 43 la $ET = \sqrt{5}$ per raggio, collo stesso centro *O* si descriva il cerchio

maggiore, nella di cui circonferenza è il punto V, il quale si marchi in tal luogo per rapporto al punto v, che la Vv riesca press'a poco tangente al cerchio interno in v.

Si supponga divisa la figura data in tanti triangoli ABC, ACD, CDE, EDF, immaginandovi delle rette AC, CD ecc.

Si pongano dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, ecc. alle distanze AB, AC, BC, CD, ecc., che misurano i lati di questi triangoli.

Si applichino queste distanze 1, 2, 3 ecc. successivamente come corde a tanti archi successivi del cerchio V, cioè la AB da V in 1; la AC da 1 in 2; la BC da 2 in 3, ecc. fino in fine; il che si fa prendendo la distanza AB per raggio, e fatto centro in V, tagliando questa stessa circonferenza con un arco in 1, ecc.

Colla distanza Vv presa per raggio si faccia centro successivamente nei punti 1, 2, 3, 4, ecc., e si descrivano degli archi, che taglino successivamente la circonferenza minore in 1, 2, 3, 4, ecc. fino in fine.

Le corde del cerchio interno, ossia le distanze da v ad 1, da 1 a 2, da 2 a 3, da 3 a 4, ecc. saranno i lati ab, ac, bc, cd, ecc. della nuova figura, la quale si costruirà triangolo per triangolo. Colla distanza da v in 1 si marcheranno i due punti ab. Coi centri a e b, e colle distanze seconda e terza prese dal cerchio interno (la seconda è dall' 1 al 2; la terza dal 2 al 3) si segneranno due archi, che si taglino in c. Coi centri c ed a, e colle distanze quarta e quinta prese dal cerchio interno (la quarta è dal 3 al 4, la quinta dal 4 al 5) si segneranno due archi, che si taglino in d. Nella stessa maniera si troveranno i punti e ed f, e sarà costruita la figura.

Dim. Le corde del cerchio interno stanno alle rispettive corde del cerchio esterno, come sta il raggio Ov al raggio OV (§ 93), cioè come $\sqrt{2}$ sta a $\sqrt{5}$. Dunque nella stessa ragione stanno tutti i lati dei triangoli della figura $abcefd$ ai rispettivi lati dei triangoli della figura $ABCEFD$. Dunque i triangoli delle due figure sono tra loro equiangoli e simili (5, lib. VI, def. 1ª). Dunque le due stesse figure poligone sono simili (20, lib. VI), ed essendo la proporzione, ossia ragione delle aree dei poligoni duplicata della ragione dei lati (ivi); sarà l' area del poligono $abcefd$ all' area $ABCEFD$ come 2 a 5. Sarà dunque

l'area della figura minore eguale a due quinti della maggiore.

Da quest' esempio si vede cosa si dovrà fare, qualunque altro sia il rapporto, nel quale si voglia, che l'area della figura da costruirsi sia alla data. Si descriveranno due circonferenze v e V, i raggi delle quali staranno tra loro nel rapporto delle radici dei numeri, che formano il rapporto delle aree. Nella circonferenza, che corrisponde alla figura data, si porranno successivamente per corde i lati dei triangoli, nei quali si suppone divisa la figura data. Per via di queste col metodo indicato si troveranno delle corde proporzionali nell'altra circonferenza. Queste saranno i rispettivi lati dei triangoli della nuova figura.

Il rapporto delle mezze radici e delle intere essendo lo stesso, servirà in molti casi la fig. 45 (§ 104). Per gli altri casi vedi i §§ 101, 102 e 103.

Si sceglie poi un raggio AB, che sia il possibile maggiore comodamente (fig. 44 e 45), perchè i due cerchj sieno meglio capaci delle grandezze delle corde da applicarvisi, e perchè le intersezioni, che ne nascono, faccian angoli più vicini al retto.

127. Se il rapporto fosse dato tra i lati AB ed ab di essi tra loro, o di qualunque altre due rette fra loro; in questo rapporto si sceglierebbero i due raggi OV, Ov, i maggiori possibili.

128. *Prob.* Iscrivere ad un cerchio dato un poligono regolare tra quelli, che si possono iscrivere ad esso col compasso e colla riga.

Sol. Si divida la circonferenza in un numero di parti eguali al numero de' lati del poligono, che si vuole (§§ 27, 29, 30, 31, 32, 38, 40, 41, 42, 53, 57, 60, 63). I punti della divisione saranno i vertici del poligono regolare cercato (§ 124), e le corde degli archi saranno i lati.

Dim. Tutti i lati sono eguali, perchè sono corde di archi eguali. Anche gli angoli sono eguali, poichè essendo alla circonferenza insistono ad un egual numero di archi eguali (21, lib. III). Dunque si ha un poligono regolare del numero che si voleva di lati iscritto al cerchio (def. 1ª, lib. III).

129. Essendo 240 le parti (§ 57), nelle quali con tre punti soli presi fuori della circonferenza si può dividere essa circon-

ferenza con sei aperture di compasso al più (§ 59); tanti saranno i poligoni regolari, che con questi tre punti, e sei aperture di compasso si potranno iscrivere al cerchio, quanti sono i diversi numeri, che dividono esattamente il 240. Ora questi numeri sono i seguenti 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240. Dunque omettendo il 2, si potrà iscrivere un poligono regolare di 3 lati, di 4 lati, di 5, di 6, di 8, di 10, ecc., fino al poligono di 240 lati.

130. Se il numero dei lati del poligono che si vuole, si trova essere uno di quelli, pei quali si è divisa la circonferenza ai §§ 27, 30 e seguenti, per esempio il 12, si divida la circonferenza in 12 parti eguali (§ 31); i due punti estremi di ciascuna di queste saranno ai vertici degli angoli del poligono che si vuole iscrivere; ossia, ciò che è lo stesso, le corde di questi archi saranno i lati del poligono.

Se il numero dei lati del poligono che si vuole, non si trovasse espressamente nei Problemi del Libro secondo: come per esempio se si volesse costruire un poligono di sessanta lati; si duplichi, si triplichi o si quadruplichi, ecc. questo numero, finchè si arrivi ad avere uno dei numeri, che si contengano espressamente nei Problemi; nell'esempio addotto si duplichi il 60, e si avrà 120; il qual numero si trova espressamente al § 42, dove si dà il modo di dividere la circonferenza in 120 parti eguali. Queste parti prendendole a due a due ci somministreranno 60 archi eguali; le corde dei quali saranno i 60 lati del poligono che si voleva. Se si avesse dovuto triplicare il numero, come nel caso, che si fosse voluto un poligono di 16 lati; divisa allora la circonferenza in 48 parti (§ 38), numero triplo del 16, si dovranno prendere tre di questi archi per avere un arco, che sia la sedicesima parte della circonferenza: ognuno di questi archi eguali avrà per corda un lato del poligono di sedici lati ed angoli.

130. *Prob.* Ad un cerchio dato *BCDd* (fig. 59) circoscrivere un triangolo equilatero (§ 124).

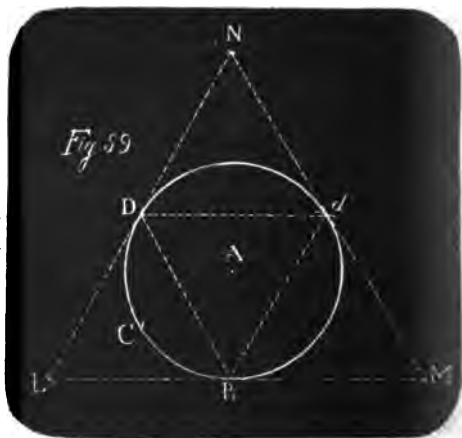
Sol. Si faccia al raggio di questo cerchio $AB = BC = CD$; a $BD = BL = DL = Dd = DN = dN = dM = BM$.

I tre punti *L, M, N* saranno i vertici del triangolo equilatero circoscritto al cerchio.

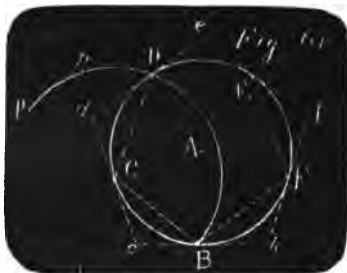
Dim. Il triangolo *BDd* è equilatero iscritto al cerchio (§§ 29 e 131). Ai lati di questo hanno eguali i lati i triangoli *DLB*, *NDd*, *dBM*; dunque saranno eguali i loro angoli (8, lib. I). Perciò i tre angoli *NDd*, *dDB*, *BDL* saranno eguali ai tre angoli del triangolo iscritto, cioè a due retti (32, lib. I). Quindi la *NDL* sarà retta (14, lib. I). Lo stesso si dimostrerà delle altre due *LBM*, *NdM*. Saranno poi ciascuna di esse dupla del lato *BD*, dunque eguali tra loro. Dunque il triangolo *LMN* è equilatero. Essendo poi gli angoli *NDd*, *DLB* eguali, sarà la *Dd* parallela alla *LB* (29, lib. I), ossia alla *LM*. Ora i punti *N*, *A*, *B* sono in una retta perpendicolare alla *Dd* (§§ 13 e 14). Dunque la *AB* è perpendicolare anche alla *LM* (27, lib. I). Dunque la *LM* è tangente del cerchio (16, lib. III). Lo stesso si dimostrerà delle due *NL*, *NM*. Dunque il triangolo *NLM* è equilatero circoscritto al cerchio (def. 2ª, lib. IV).

132. *Prob.* Ad un dato cerchio (fig. 60) circoscrivere un quadrato.

Sol. Si divida la sua circonferenza in quattro parti eguali nei punti *B*, *F*, *E*, *f* (§ 27). Con questi punti presi per centri, e col raggio *AB* si segnino degli archi, che si taglino in *R*, *S*, *T*, *V*. Saranno questi ultimi quattro punti i vertici del quadrato circoscritto al cerchio.

Dim. L'angolo *TBA* è retto (§ 100). Nella stessa guisa si dimostra essere retto l' angolo *SBA*. Dunque *TBS* è una retta (14 , lib. I) perpendicolare

al diametro BE, e però tangente al cerchio (16, lib. III). Lo stesso si dimostra delle altre TFV, VER, RfS. Avendo poi il triangolo BFT i lati eguali rispettivamente ai lati del triangolo BFA; sarà l' angolo $BTF{=}BAF$ (8, lib. I); quindi retto (§ 27). Lo stesso si dimostra degli altri angoli V, R, S. Dunque ecc.

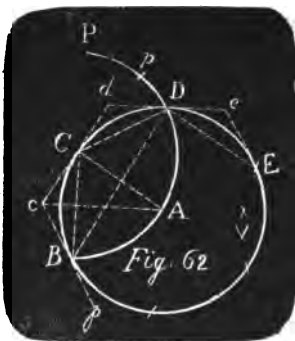
133. Ad un dato cerchio circoscrivere un pentagono regolare.

Sol. Sia il cerchio BDE descritto col raggio AB (fig. 61). Si divida la sua circonferenza in cinque parti eguali (§ 40) nei punti B, C, D, E, F. Fatto centro in uno di questi punti C, col raggio CB si descriva la semicirconferenza BDP (§ 64). Preso per centro il punto E opposto

all'arco CB, col raggio EC si tagli l'arco BDP in p. Col raggio Pp, e coi centri B, C, D, E, F si segnino degli archi, che si taglino in b, c, d, e, f. Saranno questi ultimi punti i vertici degli angoli del pentagono circoscritto al cerchio.

Per dimostrazione di questo Problema servirà la dimostrazione del seguente.

134. *Prob.* Dati i vertici d'un poligono regolare iscritto al cerchio (fig. 62); trovare i vertici d'un simile poligono regolare circoscritto.

Sol. Sieno i punti B, C, D, E, ecc. vertici del poligono iscritto al cerchio. Con uno di essi C preso per centro, e colla distanza di due d'essi CB presa per raggio si descriva la semicirconferenza BDP (§ 64). Coi centri B e C, e col raggio BD si segnino due archi, che si taglino in V. (Nel caso del pentagono (fig. 61) il punto V coincide col punto E). Con questo stesso raggio BD, e col centro V si tagli la circonferenza BDP in p. Col raggio Pp, e coi centri B, C, D, E, ecc. vertici dell'inscritto si descri-

vano degli archi, che si taglino nei punti b, c, d, e, ecc. Questi saranno i vertici del poligono regolare circoscritto.

Dim. Pel § 22 si ha $pP \cdot VC = (CD)^2$, cioè $cC \cdot BD = (BC)^2$. Quindi (17, lib. VI) $BD : BC :: BC : Cc$. Ma $BC = CD$ e $Bc = cC$. Dunque nei due triangoli isosceli BCD, BcC tutti i lati saranno proporzionali. Dunque (5, lib. VI) sarà l' angolo $cCB = CBD$. Quindi le due cC, BD saranno parallele (28, lib. I). Nella stessa guisa si proverà, che alla stessa BD è parallela anche la Cd. Saranno dunque i punti c, C, d nella stessa retta. Ma per essere $BC = CD$, il raggio AC è perpendicolare alla BD (§ 14). Dunque anche alla cd (29, lib. I). Dunque la cd è tangente (16, lib. III) alla sua metà in C. Lo stesso si dimostra della $de = cd$ nella sua metà in D, e così delle altre. Saranno poi queste tante di numero, quanti sono i punti B, C, D, E, ecc. Dunque ecc. (def. 2ª, lib. IV).

135. *Prob.* Sopra un dato lato AE costruire un triangolo equilatero (Fig. 1).

Sol. Si trovi il punto D come nel § 1. Sarà ADE il triangolo cercato.

136. *Prob.* Sopra un dato lato AB costruire un quadrato.

Sol. Si trovino come al § 100 i due punti F, T. Sarà $ABTF$ il quadrato cercato (fig. 43).

Dim. Essendosi ivi dimostrato essere la BT eguale e parallela ad FA, e perciò perpendicolare ad AB; anche la FT sarà parallela alla BA (33, lib. I). Quindi anche gli angoli BTF, AFT saranno retti (27, lib. I), e $ABTF$ un quadrato (Def. 32, lib. I).

137. *Prob.* Sopra un dato lato AB costruire un pentagono regolare (Fig. 63).

Sol. I. Col raggio AB centro A si descriva la circonferenza $BCDEd$, e si faccia ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Si faccia a $BD = Ba = Ea$. Si faccia poi ad $Aa = Db = db$. Col centro B,

raggio $B\ A$ si descriva l'arco indefinito $A\ C\ L$. In esso si faccia ad $Ab=AH=HP=PL$. Si faccia similmente nella circonferenza BCD ad $Ab=BQ=QK=KN$. Coi centri L ed N, e col raggio AB si segnino due archi, che si taglino in M. Saranno i punti A, B, L, M, N vertici del pentagono regolare cercato.

Dim. L'angolo $C\ B\ F$ (Fig. 61) del pentagono regolare $BCDEF$ è misurato dalla metà dell'arco $CDEF$ (20, lib. III). Essendo dunque quest'arco eguale a tre quinti della circonferenza; langolo CBF del pentagono è misurato da tre decimi. Ora gli archi $AHPL$, $BQKN$, che misurano gli angoli ABL, BAN, sono ciascuno tre decimi della circonferenza (§ 41). Sono dunque gli angoli ABL, BAN gli angoli del pentagono regolare da costruirsi sopra AB. Sono poi anche i tre lati AB, BL, AN eguali tra loro, cioè lati di esso pentagono. Confrontando dunque i punti L, B, A, N di questa Figura 63 coi punti C, B, F, E della Fig. 61, il triangolo LMN di questa Figura, avendo i lati eguali rispettivamente ai lati del triangolo CDE (Fig. 61), avrà anche gli angoli eguali (8, lib. I), e tutto coinciderà. Dunque ecc.

Sol. II. Descritta, come sopra, col raggio AB, centro A la circonferenza BDd (fig. 64), e in essa fatto ad $AB=BC=CD=DE=Ed$; e fatto a $BD=Ba=Ea$; e fatto ad $Aa=Db=db$; col raggio bE, e col centro A si segni un arco, che passi per L ed M. Collo stesso raggio bE, e col centro B si tagli quest' arco in M e la circonferenza in N. Finalmente collo stesso raggio, e col centro N si tagli l'arco LM in L. Saranno i punti A, B, L, M, N vertici del pentagono regolare.

Fig 64

Dim. Si ha $(BE)^2=(bE)^2+(Bb)^2+2Bb\,.\,bE$ (4, lib. II). Essendo poi l'angolo BNE nel semicerchio, si ha (31, lib. III, 47, lib. I) $(BE)^2=(BN)^2+(NE)^2$. Confrontando i due valori di $(BE)^2$, nei quali $(bE)^2=(BN)^2$, risulta $(Bb)^2+2Bb\,.\,bE=(NE)^2$. Essendo poi $bE=bA+AE=Ab+AB$, si avrà $(Bb)^2+2Bb\,.\,Ab+$

$2Bb \cdot AB = (NE)^2$. Ma $2Bb \cdot AB = 2(Ab)^2$ (§ 46). Dunque $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + (Ab)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2$. Ma $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + (Ab)^2 = (AB)^2$. Dunque $(AB)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2$. Sarà dunque NE il lato del pentagono iscritto nel cerchio BDd (§ 50) (10, lib. XIII); quindi essendo l'arco NE eguale a due decime della circonferenza, sarà l'arco BCN eguale a tre decime, e l'angolo BAN sarà l'angolo del pentagono regolare. Essendo poi la BN sottesa ai due lati BA, AN del pentagono regolare; sarà essa il lato del triangolo isoscele, che ha per base AB e ciascuno degli angoli alla base duplo dell'angolo al vertice (11, lib. IV). Saranno dunque anche i punti L ed M vertici del pentagono regolare.

138. *Prob.* Sopra un dato lato AB costruire un esagono regolare (Fig. 65).

Sol. Col raggio AB, e coi centri A e B si segnino due archi, che si taglino in O. Collo stesso raggio, e col centro O si descriva un cerchio, e nella sua circonferenza si faccia ad $AB = BC = CD = DE = EF$. Sarà $ABCDEF$ l'esagono regolare cercato.

Fig. 65

Per la Dimostrazione vedi la 15, lib. IV.

139. *Prob.* Sopra un dato lato AB costruire un ottangolo regolare (Fig. 66).

Sol. I. Col raggio AB, e coi centri A e B si descrivano le due semicirconferenze $BCDE$, $ACde$ (§ 64). Si faccia a $CE = Ea = Ba = A\alpha = e\alpha$. Col raggio $A\,B$, centro a si tagli l'arco DE in H. Collo stesso raggio, e centro α si tagli l'arco $d\,e$ in h. Collo stesso raggio, e coi centri H ed h si segnino due archi, che passino per G e g. Col

Fig. 66

raggio Ba, e coi centri a ed α si taglino questi archi in g e G. Col raggio AB, e coi centri G e g si segnino due archi, che passino per F ed f. Col raggio Aa, e coi centri a ed α si taglino questi due archi in f ed F. Saranno i punti A, B, h, g, f, F, G, H i vertici dell' ottagono regolare costruito sul ato AB.

Dim. I lati AB, Bh, hg, gf, AH, HG, GF sono tutti eguali er costruzione. Ora se si consideri un ottagono regolare in-ritto nel cerchio, si troverà, che ognuno dei suoi angoli alla rconferenza ha per base un arco eguale a sei ottavi di essa, perciò è misurato da tre ottavi (20, lib. III). Si ha poi l'arco CH eguali a tre ottavi (§ 30). Dunque l' angolo BAH è del-ttagono. Istessamente lo è l'angolo ABh. Essendo poi le aA, perpendicolari alla AB (§ 27), saranno parallele tra loro lib. I). Dunque la Ha, che fa un angolo semiretto colla aA 27), lo farà ancora colla αB (27, lib. I); ma è semiretto anche ; dunque aH è parallela ad hB (28, lib. I). Dunque anche è eguale e parallela alla HB (33, lib. I). Quindi l' angolo $=hBH$ (34, lib. I). Ora l'angolo $hBH=hBE-HBE=hBE-$ AE (20, lib. III). Avrà dunque per misura $^3/_8-{}^1/_{16}$ della nferenza, cioè $^5/_{16}$ di essa: dunque l'angolo Bha, che in-e coll'angolo haH equivale a due retti (27, lib. I), avrà misura $^3/_{16}$ della circonferenza. Essendo poi nei due trian-ahB, ahg tutti i lati eguali trà loro; sarà l' angolo $ahg=$ (8, lib. I). Quindi l'angolo totale ghB avrà per misura $^3/_8$ a circonferenza, e sarà angolo dell' ottagono. Istessamente rà l'angolo AHG. Sarà ancora l'angolo $hga=hBa$. Ed a-do parimente gli angoli eguali tra loro i due triangoli gfa, a; sarà l'angolo $fga=ABa$ (8, lib. I). Quindi l' angolo hgf à composto di due angoli eguali rispettivamente a due, che npongono l'angolo hBA. Gli sarà dunque eguale, e quindi à angolo dell'ottagono. Istessamente lo sarà l'angolo HGF. ranno anche i punti f ed F vertici dell'ottagono come tutti altri.

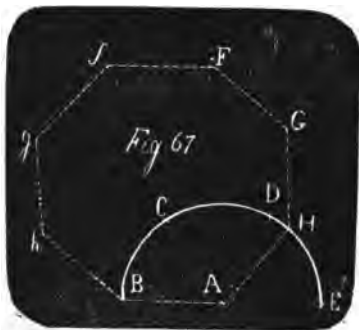
Sol. II. Col raggio AB, e coi centri A e B descritte come pra le due semicirconferenze $BCDE$, $ACde$, e fatto a $CE=$ $Ca=Ba=A\alpha=e\alpha$; di nuovo col raggio AB, e col centro a si egni un arco, che tagli l'arco DE in H, e passi per F. Collo

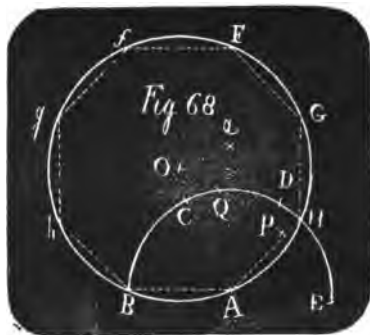
stesso raggio, centro α si segni un arco, che tagli l'arco de in h, e passi per f. Col raggio aA, centro a si segni un arco, che passi per f. Collo stesso raggio, centro α si segni un arco, che passi per F. Col raggio AB, e coi centri H ed F; h ed f si segnino degli archi, che si taglino in G, e g.

Dim. Essendo per la dimostrazione della Soluzione I le AB, $a\alpha$ parallele ed eguali tra loro, come le due aA, αB, che fanno con quelle angoli retti; posto per brevità $AB=1$; sarà anche $a\alpha=\alpha f=aF=1$. Si ha poi $(Aa)^2=2=(af)^2=(\alpha F)^2$. Quindi saranno retti gli angoli $f\alpha a$, $Fa\alpha$ (48, lib. I), e i punti f, α, B nella stessa retta (14, lib. I), e in una stessa parallela i punti F, a, A. Essendo poi anche eguali $f\alpha$, Fa, sarà fF parallela ed eguale alla $\alpha a=1$, ed $Fa\alpha f$ un quadrato. Avendo poi i due triangoli FGa, HGa i lati eguali tra loro, avranno eguali anche gli angoli (8, lib. I), e sarà l'angolo $FGa=GaH$; quindi saranno parallele le due GH, Fa, e quindi anche le due FG, aH (33, lib. I). Ma l'angolo FaH, esterno al triangolo aHA, è eguale ai due opposti interni aHA, aAH (32, lib. I), cioè a tre semiretti; è dunque l'angolo $FaH=BAH$; dunque essendo eguali gli angoli opposti nei parallelogrammi (34, lib. I), anche $FGH=BAH$. Si ha poi l' angolo $AaH=aHG$, ed AHa è retto; dunque anche l'angolo AHG vale tre semiretti. Parimente l'angolo fFa essendo retto, ed $aFG=aHG$ semiretto, sarà anche l'angolo fFG eguale a tre semiretti. Lo stesso si dimostra degli angoli in f, g ed h. Essendo dunque tutti i lati e tutti gli angoli eguali, la Figurà sarà un ottagono regolare.

Se si quadruplicano i due membri dell' equazione (§ 15) $(QM)^2=(AQ)^2-(AM)^2$, che appartiene alla Fig. 3, si avrà $4(QM)^2=4(AQ)^2-4(AM)^2$, cioè $(Qq)^2=4(AQ)^2-(AB)^2$; onde ne viene per ogni rombo il teorema: *il quadrato d' una diagonale del rombo equivale a quattro quadrati d'uno de' suoi lati, sottrattone il quadrato dell'altra diagonale.* Quindi nel rombo $FaHG$ si avrà $(aG)^2=4(Fa)^2-(FH)^2$. Ma essendo l'angolo $FGH=HAB$, e i lati, che comprendono quelli due angoli, eguali; risulta anche $FH=BH$ (4, lib. I). Si avrà dunque $(aG)^2=4(AB)^2-(BH)^2=(BE)^2-(BH)^2$. Ma $(BE)^2=(BH)^2+(HE)^2$ (31, lib. III, 47, lib. I). Dunque $(aG)^2=(HE)^2$, e quindi $aG=HE$.

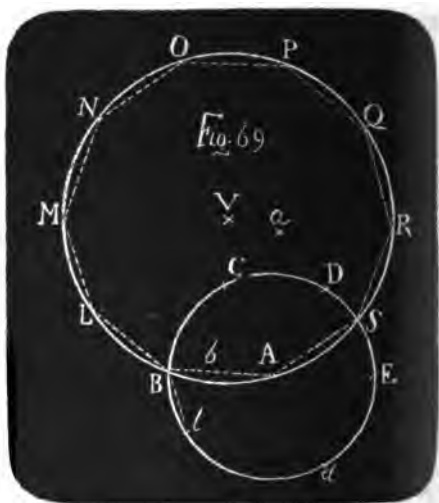
Sol. III. Col raggio AB, e col centro A descritta la semi-

circonferenza $BCDE$ (§ 64) (fig. 67), e fatto a $BD=Ba=Ea$; col raggio AB, centro a si segni un arco, che tagli l'arco DE in H, e passi per F. Col raggio aA, centro a si segni un arco, che passi per f. Col raggio aB, centro a si segni un arco, che passi per g. Col raggio BH, centro a si segni un arco, che passi per h. Col rag- HE, centro a si segni un arco, che passi per G. Si faccia ad $AB=Bh=hg=gf=fF=FG$. Sarà anche $FG=GH$, ecc.

Dim. I triangoli aAB, aBh, ahg, agf, ecc. che hanno il vertice in a e le basi sui lati della Figura, hanno tutti i loro lati eguali rispettivamente ai lati dei triangoli delle stesse lettere nella Figura 66. (Vedi le due dimostrazioni antecedenti). Dunque avranno anche gli angoli eguali (8, lib. I). Ed essendo similmente posti per ordine; anche gli angoli della Figura, che sono composti degli angoli di questi triangoli presi a due a due, saranno eguali agli angoli dell'altra Figura. Dunque ecc.

Sol. IV. Col raggio AB, e col centro A (fig. 68) descritta la semicirconferenza $BCDE$ col fare in essa ad $AB=BC=CD=DE$, e fatto a $BD=Ba=Ea$, e col raggio AB, centro a avendo tagliata la semicirconferenza in H, col raggio EH, e coi centri E ed A si segnino due archi, che si taglino in P. Collo stesso raggio PA, centro P si tagli la semicirconferenza in Q. Col raggio BQ, e coi centri B ed H si segnino due archi, che si taglino in O. Ora col centro O, e collo stesso raggio OH si descriva un cerchio, che passarà per A. Nella sua circonferenza si faccia ad $AB=Bh=$

hg=*gf*=*fF*=*FG*. Saranno i punti *A, B, h, g, f*, ecc. i vertici dell'ottagono.

Dim. Essendo $QP=AP=EP$, così pure $QA=AE=AB$, e la AB sulla continuazione della AE (15, lib. VI), si avrà (§ 22) $BQ . AP=(AQ)^2$. Quindi $AP : AQ : : AQ : BQ$ (17, lib. VI), ossia $HE : AE : : AB : BO$. Ma HE è un lato dell' ottagono inscritto al cerchio di raggio AE. Dunque anche AB sarà lato dell' ottagono inscritto al cerchio di raggio BO.

140. *Prob.* Sopra un dato lato AB costruire un decagono regolare (Fig. 69).

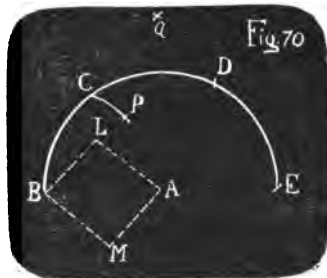
Sol. Col centro A, e col raggio AB si descriva il cerchio BDd. Si faccia nella sua circonferenza ad $AB=BC = CD = DE = Ed$. Si faccia a $BD=Ba=Ea$. Si faccia poi ad $Aa = Db=db$. Ora col raggio bE, e coi centri A e B si descrivano due archi che si taglino in V. Collo stesso raggio bE, e col centro V si descriva il cerchio $BLMNOPQRSA$, e si faccia ad $AB=BL=LM=MN= NO=OP=PQ=QR=RS$. Il punto S sarà nella sezione delle due circonferenze e si avranno nei punti *A, B, L, M*, ecc. i dieci vertici del decagono regolare cercato.

Dim. La bE è un lato del triangolo isoscele, che avendo per base la AB, ha gli angoli alla base ciascuno doppio dell'angolo al vertice (§ 137). Dunque nel triangolo VAB sarà l' angolo BVA eguale a un quinto di due retti (32, lib. I). Sarà dunque l'arco BA, che lo misura, eguale ad un decimo della circonferenza, come lo saranno gli altri archi *BL, LM, MN*, ecc. Sarà dunque il poligono $ABLMNOPQRS$ un decagono regolare inscritto al cerchio di centro V e costrutto sul lato AB.

141. *Prob.* Sopra un lato dato AB costruire un poligono regolare (fig. 69) qualunque tra quelli, che si possono inscrivere al cerchio (§ 128).

Sol. Col raggio AB si descriva un cerchio BDd. In esso si iscriva un poligono regolare simile a quello, che si vuole costruire sul lato AB, cioè di un egual numero di lati (§ 128); e sia Bl un lato di questo poligono inscritto. A questo lato Bl e al raggio AB si trovi la terza proporzionale (§§ 87, 89, 90, 91, 92). Con essa presa per raggio, e coi centri A e B si segnino due archi, che si taglino in V. Collo stesso raggio VA, centro V si descriva un cerchio $ABLMN$, ecc., e si faccia ad $AB=BL=LM=MN$ ecc. I punti A, B, L, M, N, ecc. saranno i vertici del poligono cercato.

Dim. Avendo il triangolo BAl i lati proporzionali ai lati del triangolo BVA, sarà l'angolo $BAl=BVA$ (5, lib. VI). Dunque gli archi Bl, BA, che li misurano, saranno porzioni eguali delle loro circonferenze. Dunque ecc.

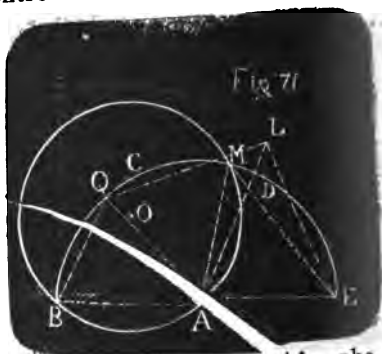
142. *Prob.* Costruire (fig. 70) un quadrato intorno ad una data diagonale AB.

Sol. Col raggio AB, centro A si descriva l'arco $BCDE$. Collo stesso raggio, e col centro B si descriva l'arco indefinito CP, e si faccia a $BC=CD=DE$. Si faccia poi a $BD=Ba=Ea$. Ora col raggio Aa, e col centro E si tagli l' arco CP in P. Col raggio AP, e coi centri A e B si segnino due archi, che si taglino in L ed M. Sarà $ALBM$ il quadrato cercato.

Dim. Se si supponga per brevità $AB=1$, sarà $AP = {}^1/_2\sqrt{2}$ (§ 104) $= AL=BL$. Quindi $(AL)^2=(BL)^2={}^1/_2$, ed $(AL)^2+(BL)^2 =1=(AB)^2$. Dunque l'angolo BLA è retto (48, lib. I), e semiretti i due angoli eguali tra loro LBA, LAB (5 e 32, lib. I). Istessamente si dimostrerà essere retto l'angolo BMA, e semiretti gli angoli MBA, MAB. Dunque saranno retti gli angoli MBL, MAL ed $ALBM$ sarà il quadrato cercato.

LIBRO DECIMO

DEI CENTRI

143. Trovare (fig. 71 il centro d'un cerchio dato MAB.

Sol. Fatto centro in qualche punto A della sua circonferenza, con uno raggio arbitrario AB, che riesca minore del diametro del cerchio dato, e maggiore del suo quarto, si descriva la semicirconferenza $BCDE$ facendo ad $AB = BC = CD = DE$. Sia M il punto dove questa taglia la circonferenza del cerchio dato. Col

raggio EM, e coi centri E ed A si segnino due archi, che si taglino in L. Collo stesso raggio LA, e col centro L si tagli il cerchio BME in Q. Col raggio BQ, e coi centri B ed A se-gnino due archi, che si taglino in O. Sarà O il centro cercato.

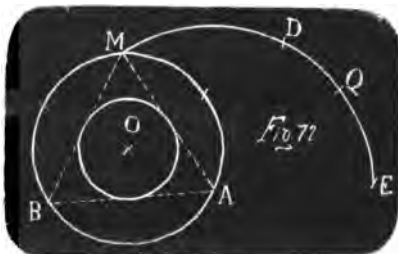
Dim. Essendo la BAE una retta (15, lib. IV), l' angolo esterno LAB è eguale ai due interni opposti ALE, AEL presi insieme nel triangolo ALE (32, lib. I). Ora i triangoli LAE, LAQ hanno tutti i lali eguali fra loro; quindi hanno eguali gli angoli opposti ai lati eguali (8, lib. I). È dunque l'angolo $AEL = QAL$ ed $ALE = ALQ$. Dunque l'angolo LAB è eguale ai due presi insieme QAL e QLA. E tolto via da tutte due le parti l'angolo QAL, resta l' angolo $QAB = QLA$. Sarà dunque nel triangolo LAQ la somma degli altri due angoli LAQ, LQA eguale alla somma dei due angoli AQB, ABQ nel triangolo ABQ (32, lib. I). Ma questi due triangoli LAQ, ABQ sono isosceli per costruzione; dunque gli angoli alla loro base saranno eguali alla semisomma (5, lib. I), e però eguali nell'uno e nell' altro triangolo tra loro. Saranno dunque i triangoli LAQ, ABQ simili (4, lib. VI), e sarà LA ad AQ, come AQ a QB. E sostituendo valori eguali, sarà ME ad EA, come AB ad OB. Dun-

que i triangoli isosceli MAE, AOB, avendo i lati proporzionali, sono equiangoli tra loro (5, lib. VI), ed è l'angolo $OAB=AME=AEM$. Ma l'angolo MAB esterno è eguale ai due interni, eguali tra loro, presi insieme AME, AEM nel triangolo AEM (32, lib. I.). Dunque sarà eguale all'angolo OAB preso due volte; ossia sarà $OAB=OAM$. Ma sono ancora nei due triangoli OAB, OAM eguali tra loro i lati AB, AM, ed il lato OA è comune; cioè i due triangoli hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali; dunque (4, lib. I) sarà anche il terzo lato OB d'un triangolo eguale al terzo lato OM dell'altro. Dunque le tre OB, OA, OM sono eguali, e però O è il centro, che si cercava del circolo MAB (9, lib. III).

144. Qualora s'è trovato il valore della QB terza proporzionale alle due LA, AQ, ossia alle due EM, EA, che è il valore del raggio del cerchio, di cui si cerca il centro, basterà prendere due punti ad arbitrio nella circonferenza del cerchio, e fatto centro in essi, con questo raggio segnare due archi, che si taglino. La loro sezione sarà il centro del cerchio.

145. Sarà utile in pratica, per ottenere sezioni ad angoli meno acuti, scegliere ad occhio un raggio AB, che s'accosti al valore del raggio del cerchio che si cerca.

146. *Prob.* Ad un triangolo equilatero (fig. 72) dato circoscrivere ed inscrivere un cerchio.

Sol. Siano i vertici del triangolo dato A, B ed M. Col raggio AM, e col centro A si segni l'arco MDE, e si faccia ad $AM=MD=DE$. Col raggio BD e coi centri B ed A si segnino due archi, che si taglino in L. Collo stesso raggio LA, e col centro L si tagli l'arco DE in Q. Col raggio QE, e con due vertici del triangolo, per esempio A e B, presi per centri si segnino due archi, che si taglino in O. Collo stesso raggio OA, e col centro O si descriva un cerchio. Esso sarà circoscritto al triangolo.

Si divida per metà la QE in m (§ 66). Col raggio Qm e collo stesso centro O si descriva un altro cerchio. Esso sarà inscritto al triangolo.

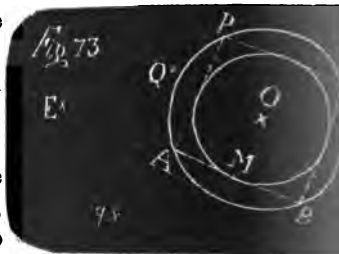
Dim. Dalla dimostrazione del § 143 risulta essere anche la QE terza proporzionale alle due EM, EA, essendo anche la BAE una retta. Sarà dunque la QE raggio d'un cerchio, passa pei tre punti M, A, B; e sarà O il centro (§ 144).

Nella figura 59, nella quale il cerchio DBd è inscritt triangolo NLM, avendosi la AD perpendicolare ad LD, e la N ad LB (§ 131), i triangoli rettangoli NDA, NBL, che hann angolo comune in N, hanno anche il terzo angolo eguale lib. I); quindi si ha la proporzione (4, lib. VI) $NL : LB :: N$ DA. Ma NL è doppia di LB; dunque anche NA è doppi DA, cioè il raggio del cerchio circoscritto al triangolo eq tero è doppio del raggio del cerchio inscritto. Dunque ecc

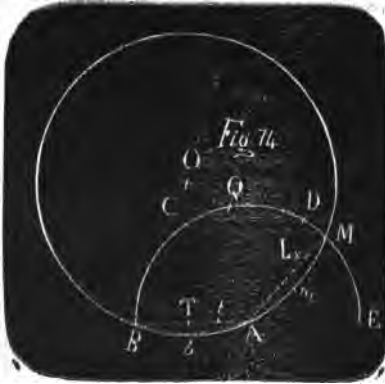
147. *Prob.* Ad un quadrato dato circoscrivere ed inscrivere un cerchio (fig. 73).

Sol. Sieno i quattro vertici dati del quadrato A, B, T, P. Si faccia ad $AB=AE$. Ad $PB=$ $=PE$. Collo stesso raggio BP, e col centro B si segni un arco, che passi per Q e q. Col centro E, e col raggio EA si tagli quest'arco in Q e q. Collo stesso raggio AE, e coi centri Q si segnino due archi, che si taglino in M. Col raggio AQ, e centri A e B si segnino due archi, che si taglino in O. C stesso raggio OB, e col centro O si descriva un cerchio. E sarà circoscritto al quadrato. Collo stesso centro O, e col rag OM si descriva un altro cerchio. Esso sarà inscritto al quadr

Dim. Se per brevità si suppone $AB=1$, si avrà $AQ=$ (§ 104)$=AO=BO$. Sarà dunque $(AO)^2+(BO)^2=1=(AB)^2$. Qui sarà retto l'angolo BOA (48, lib. I), e semiretti gli angoli O OBA (5 e 32, lib. I). Essendo poi retto l'angolo BAP del q drato, sarà semiretto l'angolo OAP. Dunque nei due trian BAO, PAO si avrà un angolo eguale compreso fra lati eg tra loro. Quindi sarà anche $OB = OP$ (4, lib. I). Nella ste maniera si dimostra essere anche $OB=OT$. Dunque il cerc $ABTP$ è circoscritto al quadrato.

La OM è perpendicolare alla MA (§ 83). Dunque la B

tangente al cerchio descritto col raggio OM. Lo stesso si di-
›stra degli altri lati AP, PT, TB. Dunque il cerchio descritto
l raggio OM, e col centro O è inscritto al quadrato.

148. *Prob.* Ad un qualun-
e poligono regolare (fig. 74)
·coscrivere e inscrivere un
rchio.

Sieno B, A, M tre vertici
questo poligono regolare,
i quali quello di mezzo A
egualmente lontano dagli
ri due B ed M. Fatto cen-
› in A, col raggio AB si
scriva la semicirconferenza
CDE (§ 64). Col raggio ME,
:oi centri A ed E si segnino
e archi, che si taglino in L. Col centro L e collo stesso raggio
1 si tagli la semicirconferenza $BCDE$ in Q. La BQ sarà il
ggio del cerchio circoscritto. E però presi per centri due ver-
i del poligono, per esempio B ed A, e col raggio BQ segnati
e archi, che si taglino in O; sarà O il centro.

Se AB è un lato del poligono, si divida per metà in T (§ 66).
rà OT il raggio del cerchio inscritto, che si descriverà col
desimo centro O. Se fosse qualunque altro Ab uno de' lati
l poligono, si divida per metà Ab in t. Sarà Ot il raggio del
·chio da inscriversi col medesimo centro.

Dim. Che O sia il centro del cerchio, che passa pei tre
nti B, A, M, risulta dalla dimostrazione del § 14. Dunque è
ıtro del cerchio ciscoscritto, poichè pei tre punti B, A, M non
può far passare che un cerchio (25, lib. III).

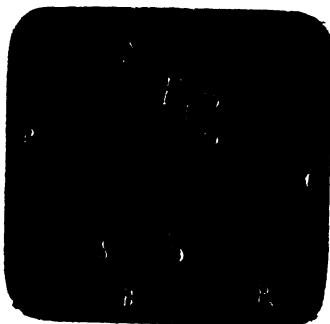
È poi OT perpendicolare alla TA (§ 83). Quindi la TA sarà
ıgente al cerchio descritto col raggio OT, e col centro O
, lib. I). Lo stesso si dimostra di tutti gli altri lati eguali
AB. Dunque questo cerchio è inscritto al poligono, che ha
lato AB. Istessamente si dimostra, che il cerchio descritto
raggio Ot, e col centro O è inscritto al poligono, che ha
lato Ab.

149. Se AB è lato del poligono, nel quale si vuole inscrivere

il cerchio, ci saranno molte maniere di dividerlo per metà (§ 66). Pel quadrato abbiamo assegnato la più semplice (§ 147). Pel triangolo solo (§ 146) il raggio del cerchio inscritto è la metà del raggio del circoscritto. Nel solo quadrato è eguale alla metà del lato.

150. *Prob.* Trovare il centro *S* d'un cerchio (fig. 75), che passi per tre punti dati *PQR*.

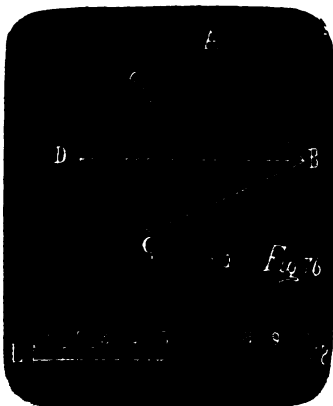
Sol. Fatto centro in *P* e *Q*, con un raggio arbitrario si segnino due archi, che si taglino in *A* e *B*. Fatto centro in *Q* ed *R*, si segnino pure con un raggio arbitrario due archi, che si taglino in *C* e *D*. Si trovi il punto *S*, dove le due *AB*, *CD* si tagliano (§ 112). Sarà *S* il centro cercato.

Dim. Vedi la 25, lib. III.

LIBRO UNDECIMO

PROBLEMI VARJ

151. *Prob.* Data una scala *LS*, trovare l' area del campo triangolare *ABD*, e del campo quadrilatero *ABCD* (fig. 76).

Sol. Si faccia a $AB = Ba$; a $DA = Da$ (§ 11). Si portino sulla scala *LS* le distanze *Aa* e *BD* prese sul compasso, e si trovi essere per esempio $Aa = 7$, $BD = 8$. Si moltiplichino tra loro questi due numeri, e si pigli il quarto del prodotto $= 14$. Questo numero esprimerà l' area del triangolo *ABD*.

Se si voglia l'area del campo quadrilatero *A B C D*, trovato,

come qui sopra, il punto a, si faccia a $BC=Bc$, a $DC=Dc$. Si trovino sulla scala le due distanze Aa, Cc, e sia per esempio $Aa=7$, $Cc=5$. Per la loro somma$=12$ si moltiplichi la BD trovata sulla scala per esempio $=8$. Del prodotto 96 si pigli la quarta parte 24. Questo numero esprimerà l'area del quadrilatero $ABCD$.

Dim. La Aa è doppia della perpendicolare, che da A cade sopra la BD (§ 14). Ma l'area del triangolo ABD è eguale alla metà dell'area d'un parallelogrammo, che ha per base la BD, e per altezza questa perpendicolare (41, lib. I). Dunque è eguale alla quarta parte del prodotto della Aa nella BD. Egualmente l'area del triangolo BCD è eguale alla quarta parte del prodotto della Cc nella BD. Dunque l'area del quadrilatero $ABCD$ è eguale alla quarta parte del prodotto della somma delle due parallele Aa, Cc nella loro perpendicolare BD.

152. Può servire questo problema a misurare l'area di tutto un disegno di un campo poligono, ripartendolo in tanti quadrilateri e triangoli coll'immaginarvi delle linee rette. Si potrebbero proporre anche altre maniere di ridurlo in trapezj, ma queste si possono, quando giovi, raccogliere facilmente dal metodo, col quale si è sciolto questo problema.

153. *Prob.* Dati i piani triangolari (fig. 77), che contengono una piramide tetraedra, trovare nella sua base il punto, nel quale cade la perpendicolare dal vertice, e trovare la sua altezza.

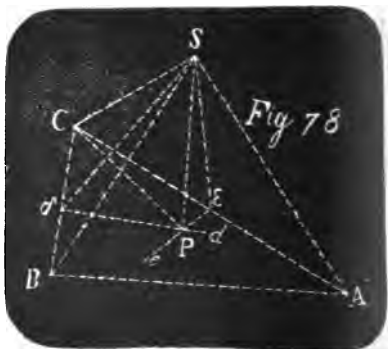
Sol. Sia il triangolo ABC la base di questa piramide tetraedra, e sieno AEC, BDC, AFB i piani triangolari, che vanno al suo vertice.

Col centro C e col raggio $CD = CE$ si descriva un arco, che passi per e e d.

Col centro B e col raggio BD si descriva un arco, che tagli il primo in d. Col centro A e col raggio AE si segni un arco, che tagli il primo in e.

Si trovi il punto P, dove si tagliano le due rette Dd, Ee (§ 11). Sarà questo il punto, dove cade la perpendicolare dal vertice della piramide.

Si divida per metà la CE in m (§ 66). Col raggio mC, centro m si descriva la semicirconferenza CpE. Si faccia a $CP = Cp$. Sarà Ep l'altezza della piramide.

Dim. Se nella piramide $SABC$, (fig. 78) che ha per base il triangolo ABC e per vertice S, si guidi nel triangolo SCB la retta $S\delta$ perpendicolare a CB, e nel piano della base ACB dal punto δ si alzi la perpendicolare δd; sarà in essa il punto P, in cui cade la perpendicolare SP dal vertice (11, lib. XI). Istessamente se dal punto S nel piano SAC si guidi ad AC la perpendicolare $S\varepsilon$, e da ε nel piano della base ACB si guidi la perpendicolare εe alla stessa AC; sarà in essa il punto P. Sarà dunque questo la sezione delle due rette δd, εe. Ma nella Figura 77, nella quale i punti D ed E rappresentano il punto S della Figura 78, la Dd è perpendicolare alla BC in un punto δ (§ 14); così pure la Ee è perpendicolare alla AC in un punto ε. Dunque il punto P è il cercato.

Essendo poi i due triangoli CPS, (fig. 78,) CpE (fig. 77) rettangoli in P e p il primo per supposizione e il secondo per la 31, lib. III, ed essendo CS la stessa CE e la $CP = Cp$; sarà ancora $PS = pE$. Poichè (Fig. 78) $(CS)^2 - (CP)^2 = (PS)^2$ (47, lib. I). Egualmente (Fig. 77) $(CE)^2 - (Cp)^2 = (pE)^2$. Ma $(CS)^2 - (CP)^2 = (CE)^2 - (Cp)^2$. Dunque $(PS)^2 = (pE)^2$. Quindi $PS = pE$. È dunque pE l'altezza della piramide.

154. Fin qui nelle Dimostrazioni non ci siamo dipartiti dagli Elementi di Euclide. Ma poichè in seguito ciò non si potrebbe

più fare ogni volta senza troppa prolissità; porremo qui in sussidio alcune equazioni, che si trovano dimostrate in tutti i trattati di Trigonometria Piana.

155. Se in un cerchio descritto col raggio $=1$ sieno x ed y due archi qualunque; si avrà:

$$\mathrm{sen}\,(x+y) = \mathrm{sen}x \,.\, \cos y + \cos x \,.\, \mathrm{sen}y,$$
$$\mathrm{sen}\,(x-y) = \mathrm{sen}x \,.\, \cos y - \cos x \,.\, \mathrm{sen}y,$$
$$\cos\,(x+y) = \cos x \,.\, \cos y - \mathrm{sen}x \,.\, \mathrm{sen}y,$$
$$\cos\,(x-y) = \cos x \,.\, \cos y + \mathrm{sen}x \,.\, \mathrm{sen}y.$$

156. Se nella terza di queste equazioni si ponga $x=y$; si avrà:

$$\cos 2x = (\cos x)^2 - (\mathrm{sen}x)^2.$$

E poichè $(\cos x)^2 + (\mathrm{sen}x)^2 = 1$, e quindi $(\cos x)^2 = 1 - (\mathrm{sen}x)^2$; ne verrà $\cos 2x = 1 - 2\,(\mathrm{sen}x)^2$ e quindi $(\mathrm{sen}x)^2 = \frac{1-\cos 2x}{2}$; e finalmente $\mathrm{sen}x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$.

157. Se si sommano la prima e la seconda delle equazioni del § 155, ne verrà

$$\mathrm{sen}\,(x+y) + \mathrm{sen}\,(x-y) = 2\,\mathrm{sen}x \,.\, \cos y,$$

e quindi

$$\mathrm{sen}x \,.\, \cos y = \frac{\mathrm{sen}\,(x+y) + \mathrm{sen}\,(x-y)}{2}.$$

Se si faccia $x+y=p$; $x-y=q$; si avrà $2x=p+q$; quindi $\mathrm{sen}\,p + \mathrm{sen}\,q = 2\mathrm{sen}\,\frac{p+q}{2} \,.\, \cos\frac{p-q}{2}$.

158. Se si sommano la terza e la quarta delle equazioni del § 155, ne verrà

$$\cos x \,.\, \cos y = \frac{\cos\,(x+y) + \cos\,(x-y)}{2},$$

e quindi $\cos\,p + \cos\,q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

159. Se si sottrae la terza dalla quarta delle predette equazioni, ne verrà

$$\mathrm{sen}x \,.\, \mathrm{sen}y = \frac{\cos\,(x-y) - \cos\,(x+y)}{2},$$

e quindi $\cos\,q - \cos\,p = 2\,\mathrm{sen}\frac{p+q}{2} \,.\, \mathrm{sen}\,\frac{p-q}{2}$.

160. Essendo 2 sen$x$ = corda $2x$: sarà (§ 156) corda $2x = 2\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$; e posto x in luogo di $2x$, si avrà

$$\text{corda } x = 2\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{2-2\cos x}.$$

Se si chiami k la corda, c il coseno, s il seno, h la corda del complemento al quadrante: si avrà

$$k^2 = 2 - 2c,\ h^2 = 2 - 2s.$$

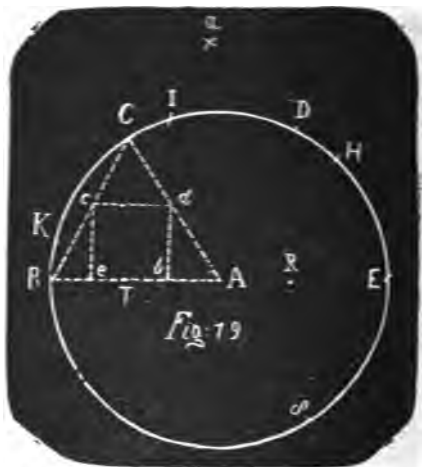
Dalla prima di queste due equazioni si avrà $c = 1 - \frac{1}{2}k^2$, ed essendo $s = \sqrt{1-c^2} = \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}k^4} = k\sqrt{1-\frac{1}{4}k^2}$; si avrà $h^2 = 2 - 2k\sqrt{1-\frac{1}{4}k^2}$.

161. *Prob.* In un dato triangolo equilatero ABC (fig. 79) inscrivere un quadrato $becd$ (§ 124).

Sol. I. Se vorremo servirci dei lati dati del triangolo, col centro A e col raggio AB si descriva il semicerchio $BCDE$ (§ 64).

Col centro E, col raggio EC si descriva un arco, che tagli il dato lato AB in e. Col centro A, e col raggio Be si descriva un arco, che tagli lo stesso lato in b. Coi centri b e e e col raggio eb si descrivano due archi, che taglino i lati AC in d e CB in c. Sarà $becd$ il quadrato iscritto.

Dim. Posto per brevità $AB=1$, sarà $Ee = EC = BD = \sqrt{3}$ (§ 2); quindi $Be = BE - Ee = 2 - \sqrt{3} = Ab$; quindi $be = AB - 2Ab = 2\sqrt{3} - 3 = (2-\sqrt{3})\sqrt{3} = ec$. Sarà dunque $Be : ec :: (2-\sqrt{3}) : (2-\sqrt{3})\sqrt{3} :: 1 : \sqrt{3}$.

Ma se si suppone che la AB sia tagliata per metà in T dalla perpendicolare CT; sarà pure $BT : TC :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (§ 104); cioè $BT : TC :: 1 : \sqrt{3}$. Dunque la ec è parallela alla TC (2,

lib. VI), e quindi perpendicolare alla AB (27, lib. I). Lo stesso si dimostrerà della db. Dunque $becd$ è il quadrato inscritto.

Sol. II. Se poi non ci volessimo servire della intersezione dei lati dati del triangolo ABC; ma solamente dati i tre punti estremi A, B e C del triangolo si dovessero trovare i quattro punti b, e, c, d del quadrato da inscriversi;

Col centro E, come prima, e col raggio EC si segni un arco, che passi per e, C ed a. Collo stesso raggio, e col centro B si segni un arco, che tagli l'antecedente in a.

Col raggio AB, e col centro a si tagli la semicirconferenza $BCDE$ in H. Si faccia in essa ad $Ha = HI = IK$.

Col raggio aK, e col centro D si descriva un arco, che passi per e. Sarà determinato il punto e.

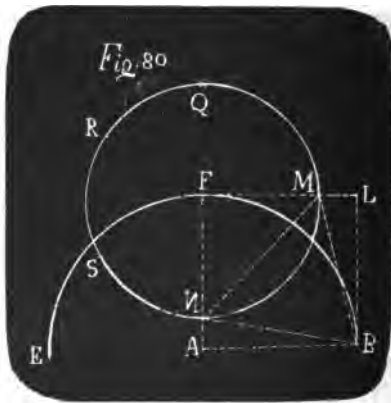
Col raggio Be, e col centro A si guidi un arco per b. Col raggio Ce, e col centro C si guidi un altro arco, che tagli l'ultimo in b. Col raggio be, e coi centri b e C si segnino due archi, che si taglino in d. Collo stesso raggio be, e coi centri e e C si segnino due archi, che si taglino in c. Sarà $becd$ il quadrato cercato.

Ovvero compito il cerchio $BCDE\delta$, e fatto ad $AB = E\delta$; col raggio aK determinato come qui sopra, e coi centri D e δ si descrivano due archi, che si taglino in e. Il resto si faccia come sopra.

Dim. Il punto K si sarà qui determinato come nella figura 9 (§ 32) per via del medesimo punto a, sicchè l'arco BK sarà una ventiquattresima parte della circonferenza. Ora nella figura 9 essendo $BK = Bk = EM$; se si confrontino i punti a, K, B, k, A, M coi punti Q, A, R, S, p, B della figura 4; dall'equazione $(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS \,.\, pQ$ (§ 20) risulterà per la figura 9 l'equazione $(aK)^2 = (Ba)^2 - Kk \,.\, Aa$. Ora Kk è corda d'una dodicesima parte della circonferenza. Per trovare il suo valore, supponendo per brevità $AB = 1$, si ha il seno di $BN = Kk = AX$ (fig. 12) $= {}^1/_2$, e il doppio del suo coseno, cioè $2NX = NO = BD = \sqrt{3}$: quindi se nell' equazione (§ 160) corda $x = \sqrt{2 - 2 \cos x}$ in luogo di x si costituisce l'arco Kk, e in luogo di $2 \cos x$, $\sqrt{3}$, si avrà la retta $Kk = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{{}^3/_2} - \sqrt{{}^1/_2}$. Quindi $(aK)^2 = 3 - \left(\sqrt{{}^3/_2} - \sqrt{{}^1/_2}\right) . \sqrt{2}$ (§ 27) $= 3 - \left(\sqrt{3} - 1\right) = 4 - \sqrt{3}$. Ora

se coi centri D e δ, e col raggio aK si segnino due archi, che si taglino in e, sarà il punto e sulla retta BE (§ 13), che dividerà in due egualmente la $D\delta$ al punto R ad angoli retti (§ 14), facendo $RD = {}^1/_2\sqrt{3}$ (§ 104). Essendo dunque $(De)^2 = (DR)^2 + (eB)^2$ (47, lib. I); sarà $(eR)^2 = (De)^2 - (DR)^2 = 4 - \sqrt{3} - {}^3/_4 = \frac{13-4\sqrt{3}}{4}$ e quindi $eR = \sqrt{3} - {}^1/_2$ e $eE = \sqrt{3}$. Dunque per la dimostrazione della Soluzione I il punto e è uno degli estremi del quadrato. Sarà poi lo stesso, se si trovi coi centri D ed E, e coi due raggi aK e BD, come nella prima parte di questa Soluzione II. Avendo poi eguali i lati tra loro i due triangoli CAb, CBe, sarà l'angolo $CBe = CAb$ (8, lib. I) $= CBA$. Quindi il punto b sarà sulla BA, e sarà un altro estremo del quadrato. Finalmente essendo in questa Soluzione le rette Cb, Ce le stesse di posizione e di grandezza, che nella Soluzione prima, ed essendo anche nella prima Soluzione $Cd = bd$, $Cc = ec$ a cagione del triangolo equilatero Ccd pel parallelismo della cd alla BA (2, lib. VI); saranno anche i punti d e c determinati in questa Soluzione come nella prima.

162. *Prob.* Nel quadrato $ABLF$ inscrivere un triangolo equilatero (fig. 80), che ha un angolo B ad un angolo del quadrato.

Sol. I. Col centro A e col raggio AB si descriva la semicirconferenza BFE, facendo ad $FB = FE$; si faccia pure a $BE = BQ = EQ$. Se ci vogliamo servire delle sezioni dei lati dati del quadrato; col centro F e col raggio FQ si descriva un arco, che tagli due lati del quadrato nei punti M ed N, saranno i punti B, M, N gli estremi del triangolo cercato.

Dim. Essendo retto l' angolo QAB (§ 83) ; sarà $(BQ)^2 = (AB)^2+(AQ)^2$ (47, lib. I), e preso per brevità $AB=1$; si avrà $4=1+(AQ)^2$; quindi $AQ=\sqrt{3}$; $FQ=AQ-AF=\sqrt{3}-1=FM=FN$. Quindi $(FM)^2=(FN)^2=4-2\sqrt{3}$, e però $(MN)^2=(FM)^2+(FN)^2 =8-4\sqrt{3}$. Essendo poi $LM=LF-FM=1-(\sqrt{3}-1)=2-\sqrt{3}$; sarà $(LM)^2=7-4\sqrt{3}$. Quindi $(BM)^2=(BL)^2+(LM)^2=8-4\sqrt{3}=(MN)^2$. Istessamente si dimostra essere $(BN)^2=(MN)^2$. Dunque $BM= MN=BN$.

Sol. II. Se non si suppongano dati, che i quattro estremi del quadrato A, B, L, F; trovato come nella Soluzione I il punto Q, col centro F, e col raggio FQ si descriva la circonferenza $QRSNM$, e fatto ad $FQ=QR=RS=SN$, col centro B, e col raggio BN si tagli questa circonferenza nel punto M. Saranno i punti B, N, M gli estremi del triangolo cercato.

Dim. L'arco $QRSN$ è la metà della circonferenza (15, lib. 4). Dunque il punto N è nella retta QFA, ed è egualmente distante da F, che nella Soluzione I; dunque è lo stesso. Il punto M anche nella Soluzione I si trova nella sezione di due archi descritti coi centri F ed B, e coi raggi eguali ad FQ ed a BN come in questa; dunque è lo stesso. Dunque ecc.

163. *Prob.* In un triangolo equilatero, di cui sono dati i vertici (fig. 81) P, Q, R, inscrivere un esagono regolare.

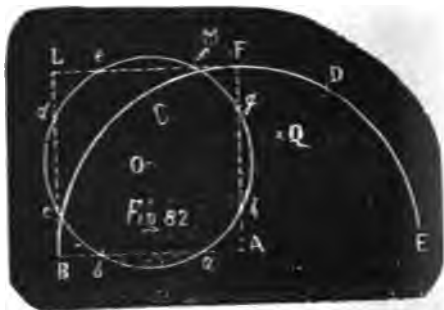
Fig 81

Sol. Si divida la distana QR in tre parti eguali nei punti c e d (§ 68). Coi centri c e d, e col raggio cd si segnino due archi, che si taglino in A. Collo stesso raggio, e col centro A si descriva un cerchio, e si faccia nella sua circonferenza a $dc=cB = BC= =CD=DE$. Saranno i punti B, C, D, E, d, c i vertici dell'esagono inscritto.

Dim. Il triangolo BcQ ha i lati Bc, Qc eguali ai lati Ad, cd del triangolo Adc, e l' angolo compreso eguale pel parallelismo delle due Bc, Ad (27, lib. I). Dunque gli è eguale in tutto (4, lib. I), e l' angolo $cQB=dcA=cQP$. Dunque il punto B è

sulla PQ. Istessamente si dimostra, che gli altri punti C, D, E sono sui lati del triangolo proposto. Dunque ecc.

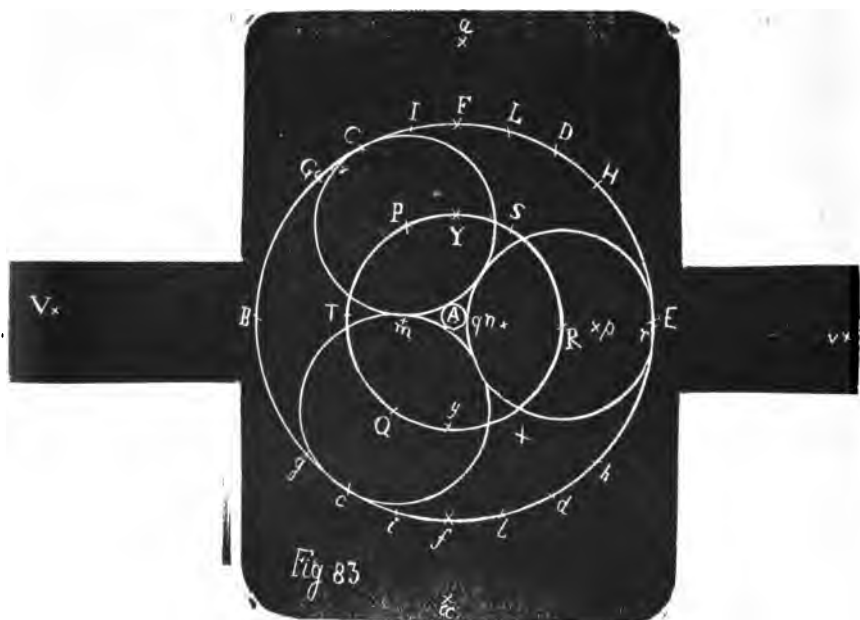
164. *Prob.* In un dato quadrato (fig. 82) $ABLF$ inscrivere un ottagono regolare.

Sol. I. Se ci vogliamo servire dell' intersezione dei lati dati del quadrato, col centro A, e col raggio AB si descriva la semicirconferenza $BCDE$, facendo ad $AB=BC=CD=DE$. Si faccia a $BF=BQ$, ad $EA=EQ$. Col raggio AQ e col centro A si taglino due lati in b e g. Collo stesso raggio, e coi centri B, L ed F si taglino in seguito i lati nei punti a, d, c, f, e h. Saranno questi i vertici dell' ottagono $abcdefgh$.

Sol. II. Trovato come nella Soluzione I il punto Q; col raggio AQ, e coi centri A e B si segnino due archi, che si taglino in O. Collo stesso raggio, e col centro A si tagli il lato AB in b. Col centro O, e col raggio Ob si descriva un cerchio, che tagli i lati del quadrato negli altri punti c, d, e, f, g, h, a. Saranno essi i vertici dell'ottagono.

Sol. III. Se non fossero dati i lati del quadrato, ma solo i quattro i vertici A, B, L, F; trovato come nella Soluzione I il punto Q, si faccia ad $EC=EM$, a $BF=BM$. Col raggio AM, e col centro A si descriva un arco, che passi per e, d. Collo stesso raggio, e col centro B si descriva un arco, che passi per f, g. Collo stesso raggio, e col centro L si descriva un arco, che passi per h, a. Collo stesso raggio, e col centro F si descriva un arco, che passi per b, c. Col raggio AQ e coi centri A, B, L, F si taglino questi archi nei punti b, g, d, a, c, f, e, h. Questi saranno i vertici dell'ottagono.

Dim. Supposto per brevità, che sia $AB=1$; sarà $AM={}^1/_2\sqrt{6}$ (§ 104); $AQ={}^1/_2\sqrt{2}$. Sarà dunque $(Ad)^2=(AM)^2={}^6/_4=1+{}^1/_2=$ $=(AB)^2+(Bd)^2$, per essere $(Bd)^2=(AQ)^2={}^1/_2$. Sarà dunque retto l' angolo ABd (48. lib. I), e però il punto d sarà nella BL.

Istessamente si dimostrerà, che tutti gli altri punti sono nei lati del quadrato proposto. Si avrà poi $Ld=BL-Bd=1-{}^1/_2\sqrt{2}$ $=Le$, e $(de)^2=(Ld)^2+(Le)^2$ (47, lib. I) $=2(Ld)^2$, e quindi $de=$ $=Ld\times\sqrt{2}=\sqrt{2}-1$. Ma si ha $cd=BL-Ld-Bc=BL-2Ld=1-2$ $+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1$.

Dunque $cd=de$. Istessamente si dimostrerà, che sono eguali tra loro tutti i lati dell'ottagono. Essendo poi eguali tra loro in tutto i triangoli *Lde*, *Bbc*, *Aah*, *Ffg* (4, lib. I); saranno eguali i loro angoli ai punti *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*; quindi saranno eguali anche i loro supplementi ai due retti, cioè gli angoli dell'ottagono (13, lib. I).

165. *Prob.* Dato un ottagono regolare (fig. 66) *ABhgfEGH*, trovare facilmente: 1° il lato d'un ottagono regolare doppio di area; 2° il lato d'un ottagono triplo.

Sol. Col lato *AB* dell'ottagono dato preso per raggio fatto in *F* ed *H* si descrivano due archi, che si taglino in *a*.

centro

Sarà: 1° aA ovvero aA il lato dell'esagono doppio: 2° AB, ovvero ag il lato dell'esagono triplo.

Dim. Se si supponga essere $AB = 1$, sarà $aA = af = \sqrt{2}$ (§ 159); $aB=ag=\sqrt{3}$ (§ 2). Ma le aree delle figure simili sono in ragione duplicata dei lati omologhi (3?. lib. VI). Dunque sarà aA lato d'un esagono doppio, ed aB d'un triplo.

165. *Prob.* In un cerchio di raggio dato AB (Fig. 83) inscrivere tre cerchj, che lo tocchino, e si tocchino tra loro.

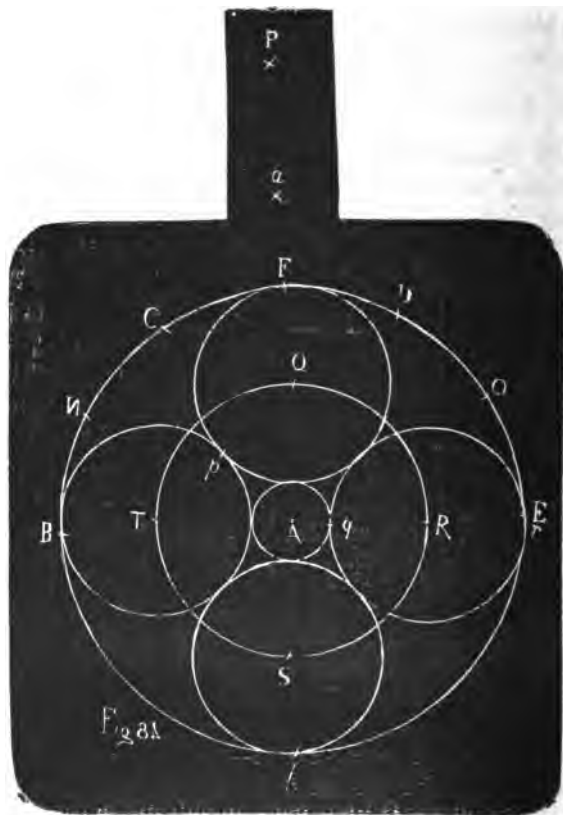
Sol. Nella circonferenza del cerchio dato si faccia ad $AB=BC=CD=DE=Ed=dc$. Col raggio BD, e col centro B si descriva un arco, che passi per a, p, ed x. Collo stesso raggio BD, e col centro E si tagli quest'arco in a ed x. Collo stesso raggio, e coi centri C, c si descrivano due archi; che si taglino in F; e coi centri D e d due altri archi, che si taglino in r. Collo stesso raggio, e coi centri F, r si descrivano due archi, che passino per m ed n. Col raggio AB, e coi centri a ed x si tagli la circonferenza del cerchio dato in G, H, ed in g, h. Si faccia in essa circonferenza allo stesso raggio $AB = GL=HI=gl=hi$. Si faccia ad $Aa=BF$, ad $IL=LY=IY=ly=iy$. Ad $Yy=Fm=Fn$. A $Dn = Dp$. Col centro A, e col raggio mn si descriva il cerchio $PSRXQT$, e preso nella sua circonferenza un punto arbitrario P, si faccia a $PA=PS=SR=RX=XQ=QT$. Finalmente coi centri P, Q, R, e col raggio pn si descrivano tre cerchj. Saranno questi i cercati.

Dim. Essendo la IL corda d'una duodecima parte della circonferenza (§ 32), sarà $IL = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ (§ 160). Ed essendo il quadrato del diametro $Li^2=(IL)^2+(Ii)^2$ (47. lib. I, 31 lib. III.); si avrà $4=2-\sqrt{3}+(Ii)^2$: quindi $(Ii)^2=2+\sqrt{3}$, ed $Ii=\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Si avrà poi (§ 20) $(aI)^2=(aB)^2-Ii\,.\,Aa=3-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=3-(1+\sqrt{3})=2-\sqrt{3}$. Quindi $aI=IL=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Per le stesse ragioni sarà $aL=LI$; quindi sarà $aIYL$ un rombo, e si avrà $(aY)^2=4(aI)^2-(IL)^2=3(IL)^2$ (§ 139). Quindi $aY=IL\,.\,\sqrt{3}$. Ma essendo i punti I ed L egualmente lontani da A; saranno i tre punti a, Y, A nella stessa retta (§ 13). Quindi $AY=Aa-aY=\sqrt{2}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}=\sqrt{2}-(3\sqrt{1/2}-\sqrt{3/2})=\sqrt{3/2}-\sqrt{1/2}=IL$. Lo stesso si dimostrerà della

Ay. Essendo poi il punto y nella $a\alpha$ cioè nella aA (§ 13); sarà $Yy=2AY$. Ora i punti V, B, A, E, v sono nella stessa retta (§ 13). Se si supponga per un momento, che nella stessa retta sieno i punti m, n; sarà $Am=AV-Vm=2-\sqrt{3}$. Poichè se si confrontino i punti C, c, V, B, A, E punti A, B, Q, P, p; q della Fig. 3, si avrà in questa Figura 83, $VB=AE$ (§ 14), e quindi $AV=2$. È poi $Vm=\sqrt{3}$. Istessamente si dimostrerà essere $An=2-\sqrt{3}$. Quindi sarà $(Fm)^2=(Am)^2+(AF)^2$ (47, lib. I) $=7-4\sqrt{3}+1=4(2-\sqrt{3})$. Quindi $Fm=2\sqrt{2-\sqrt{3}}=2AY$. Si è poi preso nella costruzione della Figura $Fm=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Dunque il punto m sarà nella retta VA. Lo stesso si dimostra del punto n. Dunque essendo perciò $Am=2-\sqrt{3}$; sarà $mn=4-2\sqrt{3}$. Avendo poi i triangoli BpD, vnD i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $Dvn=DBp$ (8, lib. I). Ma l'angolo Dvn, che è lo stesso coll'angolo DvB, essendo eguale all'angolo DBV (5, lib. I), si avrà l'angolo $DBp=DBv$. Dunque il punto p è nella retta AE. Si ha poi $Dn=Dp$, e istessamente si dimostra $dn=dp$. Dunque confrontando i punti D, d, A, n, p, E di questa Figura coi punti A, B, Q, P, p, q della Figura 3, si troverà in questa Fig. 83 essere $pE=An=2-\sqrt{3}$. Quindi $pn=AE-2An=1-4+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-3$. Essendo poi il triangolo equilatero PQR simile al triangolo equilatero BDd, e quindi anche il triangolo ABD simile al triangolo APR (20, lib. VI); sarà $AB:BD::AP:PR$. Cioè $1:\sqrt{3}::4-2\sqrt{3}:PR$. Quindi $PR=4\sqrt{3}-6=2pn$. Tagliata dunque per metà la PR in p, sarà il punto p egualmente nelle due circonferenze dei cerchi descritti coi centri P ed R, e sarà p il punto di contatto (12, lib. III). Si aggiunga ora alla retta $AR=mn=4-2\sqrt{3}$ il raggio del cerchio descritto col centro R, ossia la retta $Rr=np=2\sqrt{3}-3$; si avrà $Ar=4-3=1=AB$. Dunque il punto r sarà egualmente nelle due circonferenze, e il cerchio descritto col centro R toccherà internamente il cerchio dato (11, libro III). Lo stesso si dimostrerà degli altri. Dunque ecc.

167. Questo Problema viene sciolto elegantemente da Tommaso Simpson *Select. Exercises Ecc. Geometrical 'Problems*, Prob. 13, col cerchio e colla riga. Dalla nostra costruzione apparisce potersi sciogliere ancora più brevemente colla riga e col com-

passo, di quello che fa il Simpson , se condotta la retta *Vav*, e fatto in essa ad $AB=BV=Ev$, si faccia a $BD=Vm=Bv=vm$, col centro *A* , e col raggio *mn* si descriva il cerchio *PQR* , e si faccia il restante come nella Soluzione antecedente.

168. *Prob.* Col centro *A* (fig. 83) descrivere un cerchio, che

tocchi esteriormente i tre cerchi inscritti per il Problema antecedente (§ 166) ad un cerchio dato.

Sol. Si cerchi una terza proporzionale alle due *A B* , *A m* (§ 86). Con essa presa per raggio , e col centro *A* si descriva un cerchio. Sarà esso il cercato.

Dim. Essendo $AB=1$; $Am = 2 - \sqrt{3}$, sarà la terza propor-

zionale $=7-4\sqrt{3}$. Pra se dal raggio $Ar=1$ si sottragga il diametro qr del cerchio descritto col centro R, cioè se si sottragga $2np=4\sqrt{3}-6$; si avrà appunto $7-4\sqrt{3}$. Dunque un cerchio descritto col centro A, e con quella terza proporzionale toccherà questo cerchio inscritto nel punto q (12, lib. III), e toccherà ancora gli altri due cerchj).

169. *Prob.* In un cerchio di raggio dato AB (fig. 84) inscrivere quattro cerchj, che siano tangenti di esso e tra loro.

Sol. Si faccia nella circonferenza del dato cerchio ad $AB=BC=CD=DE$. Quindi a $BD=Ba=Ea$; quindi ad $Aa=BF=Bf$; quindi ad $AB=FN=FO$; quindi a $BD=NP=OP$. Col centro A, e col raggio aP si descriva il cerchio $QRST$. Preso un punto arbitrario Q sulla sua circonferenza, si faccia in essa a $BQ=FR=ES=fT$. Coi centri Q, R, S, T, e col raggio aF si descrivano quattro cerchj. Essi saranno i cercati.

Dim. Essendo $BF=FE=Ef=fB$ (§ 27); sarà ancora $QR=RS=ST=TQ$ (§ 93). Sarà dunque retto l'angolo TAQ. Dunque $(TQ)^2=(AT)^2+(AQ)^2=2(AT)^2$. Preso poi $AB=1$; sarà anche $FP=1$ (§ 166); quindi $AP=2$. Sarà pure $Aa=\sqrt{2}$ (§ 27); quindi $aP=2-\sqrt{2}$; $aF=\sqrt{2}-1$. Quindi $2(AT)^2=2(aP)^2=(TQ)^2=2(2-\sqrt{2})^2$, e $TQ=(2-\sqrt{2})\sqrt{2}=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)=2aF$.

Dunque la distanza dei due centri T e Q è uguale alla somma dei raggi dei due cerchj descritti con questi centri. Quindi essi si toccano alla metà della TQ in p. Lo stesso si proverà di due altri qualunque. Sia poi r il punto, dove la AR continuata taglia il cerchio descritto col centro R; sarà $Ar=AR+Rr=aP+aF=PF=1=AB$. Dunque il punto r sarà nella circonferenza del cerchio dato. Quindi la Ar passando pei due centri A ed R sarà perpendicolare alla tangente d' entrambi al punto r; quindi essi si toccheranno tra loro (13 e 16, lib. III). Lo stesso si dimostra degli altri.

170. *Prob.* Col centro A (fig. 84) descrivere un cerchio, che tocchi i quattro ultimamente inscritti (§ 169) in un cerchio dato.

Sol. Si trovi una terza proporzionale alle due rette FP, Fa (§ 86). Con essa presa per raggio, e col centro A si descriva un cerchio. Esso sarà il cercato.

Dim. Essendo $PF=1$, $Fa=\sqrt{2}-1$, sarà la terza propor-

zionale eguale a $3-2\sqrt{2}$. Ora sia q il punto, dove il raggio Ar taglia il cerchio descritto col centro R. Sarà $q\,r$ diametro di esso cerchio$=2aF=2\sqrt{2}-2$; il qual valore sottratto da $1=Ar$, lascierà $Aq=3-2\sqrt{2}$ eguale a quella terza proporzionale. Dunque il punto q sarà nelle due circonferenze; ed essendo nella retta AR, la perpendicolare ad essa retta in q sarà tangente ai due cerchj, i quali si toccheranno in q (13 e 16, libro III). Lo stesso si dimostrà per gli altri.

171. *Prob.* Trovare un arco di cerchio, che abbia il coseno eguale alla corda (Fig. 85).

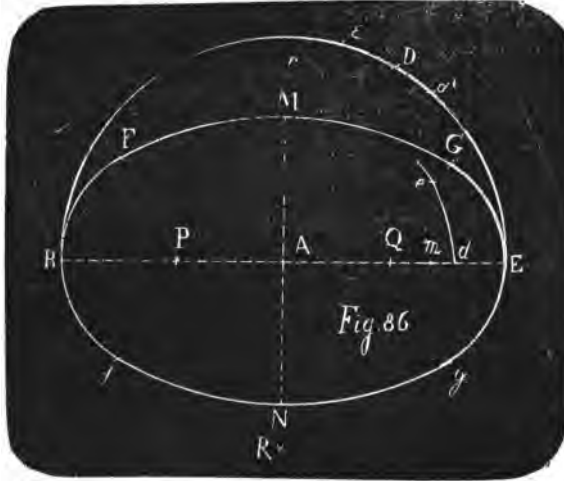
Sol. Con un raggio AB supposto$=1$ sia descritto l'arco $BCDE$, e si faccia ad $AB=BC=CD=DE=DP=CP$. Quindi si faccia a $BD=Ba=Ea$. Quindi ad $Aa=BF$. Col raggio PF, e col centro B si segni un arco che tagli l'arco $B\,C$ in Q. Sarà l' arco BQ il cercato

Dim. I punti A, F, a, P sono nella stessa retta (§ 13). I punti poi B, A, D, P essendo lontani dal punto C per la distanza CB sono nella circonferenza d' un cerchio, che si descrive col centro C, raggio CB. Inoltre essendo a $CB=BA=AD=DP$, sarà BCP diametro di questo cerchio (15, lib. VI) e $PA=\sqrt{3}$ (§ 2). Quindi $PF=\sqrt{3}-1=BQ$. Se ora si cala QR perpendicolare sopra AB, si avrà $(BQ)^2=(AB)^2+(AQ)^2-2AB\,.\,AR$ (13, lib. II); cioè $(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}=2-2AR$, e quindi $AR=\sqrt{3}-1=BQ$, come si era proposto di fare.

Questi ultimi Problemi sono dell' Ozanam sciolti da esso colla riga e col compasso.

172. *Prob.* Dati gli assi $B\,E$, MN (fig. 86) d' una elisse, descrivere intorno ad essi un'ovale composta di quattro archi di cerchio, che siano tangenti tra loro.

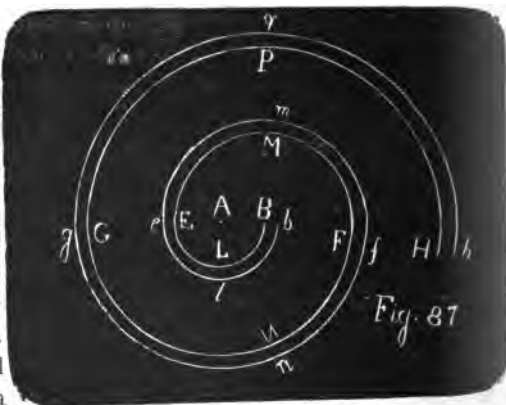
Soluz. Col centro A, dove si tagliano gli assi, e col raggio $A\,B$, che è il semi-asse maggiore, si descriva la semi-

circonferenza $B\,D\,E$, e si faccia ad $EA{=}ED$. Col centro B, e col raggio BD si tagli l'asse BA in d. Col centro A, e col raggio AM si tagli il semi-asse AE in m. Collo stesso centro A, e col raggio Ad si descriva l'arco de, e si faccia ad $Em{=}de$. Con un raggio arbitrario, e coi centri d ed e si tagli l'arco BDE in δ ed ε. Col raggio $\delta\varepsilon$, e col centro A si tagli l'asse BE in P e Q. Coi centri P e Q, e col raggio $PB{=}QE$ si descrivano gli archi FBf, GEg, e si faccia a $PB{=}BF{=}Bf{=}EG{=}Eg$. Quindi si faccia a $PQ{=}PR{=}Pr{=}QR{=}Qr$. Quindi col centro R, e col raggio RF si descriva l'arco FG, che passerà per M. Collo stesso raggio $RF{=}rf$, e col centro r si descriva l'arco fg, che passerà per N, e sarà fatto quanto volevasi.

Dim. Essendo equilateri i triangoli BFP PQR, saranno eguali gli angoli BPF, QPR (8, lib. I); quindi le due FP, PR formeranno una sola retta, perchè i due angoli $FPA+APR$ sono eguali ai due $FPA+FPB$ (13 e 14, lib. I). Dunque i due archi BF, FG si toccheranno l' un l' altro in F (13, lib. III). Lo stesso contatto si dimostra ai punti f, G, g. Se poi si supponga per brevità $AB{=}1$, sarà $BD{=}\sqrt{3}$ (§ 2)$=Bd$; quindi $Ad=\sqrt{3}-1$. Essendo poi $Ad : de :: A\delta : \delta\varepsilon$ (§ 93), sarà ancora, moltiplicando tutti due i termini della prima ragione per $\sqrt{3}+1$ (4, lib. V), $Ad(\sqrt{3}+1) : de(\sqrt{3}+1) :: A\delta : \delta\varepsilon$, e sostituendo i valori numerici di Ad ed $A\delta$, ed eseguendo la moltiplicazione nel primo termine, si avrà $2 : de\,(\sqrt{3}+1) :: 1 : \delta\varepsilon$. Quindi $2\delta\varepsilon=2AP=de\,(\sqrt{3}+1)=PQ=PR$. Essendo poi $PRQr$ un rombo, si avrà

(§ 139) $(Rr)^2=4(PR)^1-(PQ)^2=3(PR)^2$. Quindi $Rr=PR\,.\sqrt{3}=de\,(3+\sqrt{3})$, ed $RA={}^1/_2\,de\,(3+\sqrt{3})$. Si ha poi $AM=Am=AE-Em=AE-de=1-de$. Quindi $RA+AM=1+{}^1/_2 de(1+\sqrt{3})$, ossia $RM=1+{}^1/_2 PR$. Essendo poi $PF=PB=1-AP=1-{}^1/_2 PR$, si avrà $PF+PR=1+{}^1/_2 PR$, cioè $FR=RM$. Dunque l'arco FG passerà per M. Istessamente si mostrerà che l'arco fg passerà per N. Dunque ecc.

173. *Prob.* Descrivere (fig. 87) una spirale $BLEMFNGPH$ composta di più archi di cerchio.

Fig. 87

Sol. Sia $BE=BF$ la distanza, che si vuol dare alle rivoluzioni di questa spirale. Divisa la BE per metà in A (§ 66), col centro A, e col raggio AB si descriva la semicirconferenza BLE (§ 64). Col centro B, e col raggio BE si descriva la semicirconferenza EMF. Di nuovo col centro A, e col raggio AF si descriva la semicirconferenza FNG. Di nuovo col centro B, e col raggio BG si descriva la semicirconferenza GPH. Nella stessa maniera si potrebbe proseguire questa spirale indefinitamente.

Si potrà allo stesso modo duplicare questa spirale, se preso il punto b ad una distanza qual si vuole da B sulla AB (§ 73), coi centri A e b a vicenda si descriveranno le semicirconferenze ble, emf, fng, gph, ecc.

Questo Problema non ha bisogno di dimostrazione.

174. *Prob.* Trovare $\sqrt{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{\sqrt{3}}$.

Sol. Col raggio $AB=1$, e col centro A (fig. 88) si descriva la semicirconferenza $BCDE$, facendo ad $AB=BC=CD=DE$. Quindi si faccia a $BD=Ba=Ea$. Quindi ad $Aa=BP$; ad $AB=EP$. Sulla semicirconferenza si notino i punti H, I, K, facendo alla stessa $AB=aH=HI=IK$.

Col raggio AP, e coi centri E ed H si segnino due archi, che si taglino in L ed M. Sarà $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Col raggio AB, e coi centri a e K si segnino due archi, che si taglino in Q ed R. Sarà $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

Dim. Essendo $ELHM$ un rombo, sarà (§ 139) $(LM)^2 = 4(LH)^2 - (HE)^2 = 4(AP)^2 - (HE)^2$; ma $(AP)^2 = {}^1/_2$ (§ 104), $(HE)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (§§ 30 e 36). Dunque $(LM)^2 = \sqrt{2}$; quindi $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Essendo pure $aQKR$ un rombo, si avrà egualmente $(QR)^2 = 4(aQ)^2 - (aK)^2$. Ma $(aQ)^2 = (AB)^2 = 1$; $(aK)^2 = 4 - \sqrt{3}$ (§161). Dunque $(QR)^2 = \sqrt{3}$; quindi $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

175. Con simili artifizj si potrebbero trovare le radici quarte degli altri numeri interi senza servirsi del metodo di trovare le medie proporzionali (§ 99). Con esso per avere $\sqrt{\sqrt{2}}$ si sarebbe dovuta trovare una media proporzionale tra 1 e $\sqrt{2}$, ovvero tra ${}^1/_2$ e $2\sqrt{2}$, o tra altre due quantità, che moltiplicate una per l'altra dessero $\sqrt{2}$. Ma la sua strada sarebbe molto più complicata. Se si coltiverà questa Geometria del Compasso, se ne avranno dei frutti utilissimi. Io tengo preparate sopra ciò altre ricerche, che potranno aver luogo in un'Opera più estesa di questa. Ecco un uso del Problema antecedente per rapporto alla piramide tetraedra regolare.

176. *Prob.* Dato il lato AB (fig. 89) d'una piramide tetraedra regolare $SABC$; trovare: 1° la sua altezza; 2° il lato d'un quadrato, che ne agguagli la superficie; 3° il lato d'un quadrato, sul quale costruendo una piramide, che abbia per altezza il lato della proposta, la agguagli in solidità; 4° il lato d'un quadrato, sul quale costruendo una piramide d' altezza eguale alla proposta, l'agguagli anche in solidità; 5° il raggio d'una sfera circoscritta.

Sol. Costruita col raggio AB la figura 88, come nel Proble-

ma § 174, col centro B, e col raggio Ba si descriva l'arco aN, e si faccia ad $Aa=EN$. Col raggio AN, e coi centri A ed E si segnino due archi, che si taglino in n. Collo stesso raggio nA, centro n, si tagli la semicirconferenza $BCDE$ in S. Si divida LM per metà in m (§ 66), così pure QR per metà in q. Sarà:

1° BS l'altezza della piramide.

2° QR il lato del quadrato, che ne agguaglia la superficie.

3° Mm il lato del quadrato base d' una piramide d' altezza eguale al lato della proposta, e ad essa eguale in solidità.

4° Qq il lato del quadrato base d'una piramide di altezza e di solidità eguale alla proposta.

5° AN il diametro d'una sfera circoscritta.

Dim. Se dal vertice S della piramide si cali una perpendicolare Sm sul lato AB, essendo equilatero il triangolo SAB, essa taglierà in m per metà la AB (12, lib. I). Se quindi nella base ABC si alza alla AB da m la perpendicolare mT, essa passerà per C (11, lib. I), e sarà in essa il punto T, dove cade da S la perpendicolare sulla base (11, lib. XI). Egualmente si dimostra, che il punto T sarà nella retta Bn, che taglia per metà il lato AC. Si guidi la mn, essa sarà parallela alla BC (2, lib. VI), e il triangolo Amn sarà equiangolo al triangolo ABC (27, lib. I), e la BC dupla della mn (4, lib. VI). Saranno poi equiangoli tra loro i triangoli BCT, mnT (15 e 27, lib. I), e sarà $BC : mn :: CT : mT$ (4, lib. VI). Dunque CT doppia della mT; quindi $mT = {}^1/_3\, Cm$. Posto poi $AB=1$, si ha $Cm=Sm={}^1/_2\sqrt{3}$ (§ 104). Dunque $Tm={}^1/_6\sqrt{3}$. Essendo poi $(Sm)^2=(mT)^2+(ST)^2$ (47, lib. I), cioè ${}^3/_4={}^1/_{12}+(ST)^2$; si avrà $(ST)^2={}^8/_{12}={}^2/_3$; quindi $ST=\sqrt{{}^2/_3}$. Si ha poi (fig. 88) $AN={}^1/_2\sqrt{6}$ (§ 104) $=\sqrt{{}^6/_4}=\sqrt{{}^3/_2}=An$. Si ha pure $An : AS :: AS : SB$ (§ 86); cioè $\sqrt{{}^3/_2} : 1 :: 1 : SB$. Quindi $SB=\sqrt{{}^2/_3}=ST$. (fig. 89) Che era il primo.

La superficie poi della piramide tetraedra è eguale al quadruplo della superficie della base (fig. 89) ABC, la quale es-

sendo eguale a $^1/_2 AB$. $Cm = ^1/_4 \sqrt{3}$ (41, lib. I), sarà la superficie della piramide $= \sqrt{3}$. Quindi il lato del quadrato, che l'agguaglia $= \sqrt{\sqrt{3}}$. Ma è (fig. 88) la $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$ (§ 174). Dunque la QR è il lato del quadrato cercato. Che era il secondo.

Essendo nelle piramidi eguali reciproche tra loro le basi e le altezze (9, lib. XII), si avrà $1 : \sqrt{^2/_3} :: ^1/_4 \sqrt{3}$: alla base della piramide, che ha l'altezza $= AB = 1$. Quindi sarà l'area di questa base $= ^1/_4 \sqrt{2}$, e il lato del quadrato di quest'area $= ^1/_2 \sqrt{\sqrt{2}} = Mm$ (§ 174). Che era il terzo.

Essendo le piramidi d'altezza eguale in ragione delle basi, il quadrato eguale al triangolo $ABC = ^1/_4 \sqrt{3}$ avrà per lato $^1/_2 \sqrt{\sqrt{3}} = Qq$ (§ 173). Che era il quarto.

È poi il diametro della sfera circoscritta alla piramide tetraedra la potenza sesquialtera del lato della piramide (13, lib. XIII), cioè $= \sqrt{^3/_2}$. È dunque $= AN$. Che era il quinto.

177. *Prob.* Data l'altezza ST d'una piramide (fig. 88 e 89) tetraedra regolare, trovare il suo lato AB.

Sol. Con un raggio AB (fig. 88) eguale ad ST (fig. 89), si descriva il semicerchio $BCDE$ fatto ad $AB = BC = CD = DE$. Col centro B, e col raggio BD si descriva l'arco DNa, e collo stesso raggio, e col centro E si tagli in a. Col raggio Aa, e collo stesso centro E si tagli in N. Sarà AN il lato cercato eguale al lato AB della fig. 89.

Dim. Nella fig. 88 si ha $AB : AN :: 1 : \sqrt{^3/_2}$ (§ 176), ed essendo $1 : \sqrt{^3/_2} :: \sqrt{^2/_3} : 1$, come resta dimostrato dall'eguaglianza del prodotto degli estremi e dei medj, sarà AB ad AN come $\sqrt{^2/_3}$ ad 1, cioè nel rapporto dell'altezza della piramide tetraedra al suo lato (§ 176). Dunque ecc.

178. *Prob.* Dividere (fig. 90) la $AB = 1$ in cinque parti eguali anche nel caso, che non si possa avere una quintupla della AB, come al § 69.

Sol. Col raggio AB, e col centro A descritto il cerchio BDp, e fatto nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE$, quindi a $BD = Ba = B\alpha = Ea = E\alpha$, col raggio AB, e col centro α si tagli la circonferenza in g, e collo stesso raggio, e col centro g si descriva l'arco $An\alpha$. Ora col raggio BE, e col centro a si tagli quest'arco in n. Col raggio αn, e col centro B si tagli la cir-

conferenza in P e p. Collo stesso raggio pB, e coi centri p e P si segnino due archi, che si taglino in Q. Sarà AQ una quinta parte della AB posta sulla sua direzione.

Dim. Se si supponga un punto u sulla direzione della AE, e sia $Au=Aa$, sarà per gli angoli retti aAu, αAu, $(au)^2=2(aA)^2=2(\alpha A)^2=(\alpha u)^2=4=(BE)^2$; quindi $au=\alpha u=BE=an$. Essendo poi eguali gli angoli gAB, $gA\alpha$ semiretti entrambi (§ 30), saranno eguali tra loro gli angoli gAa, gAu, ciascuno eguale a tre semiretti. Quindi nei due triangoli gAa, gAu, aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali, sarà anche eguale il terzo lato ga al terzo gu (4, lib. I); quindi un cerchio descritto col centro g, raggio ga passerà per u, e sarà concentrico al cerchio $An\alpha$. Si ha poi $ga=\sqrt{5}$ (§ 104), ed essendo $an=u\alpha$, si ha (§ 93) $ga:gA::au:n\alpha$, cioè $\sqrt{5}:1::2:n\alpha$. Dunque sarà $n\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Quindi anche ciascun lato del rombo $PBpQ=n\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Quindi se si confrontino i punti P, B, p, Q, A di questa figura 90 coi punti A, p, B, P, Q della figura 3, si avrà, per la figura 90, $BQ\,.\,BA=(BP)^2$ (§ 19), cioè $BQ={}^4/_5$. Quiudi AQ, che è nella stessa retta (§ 13) $={}^1/_5$.

179. Questo Problema, che ha una soluzione abbastanza semplice, non doveva essere omesso in grazia della divisione decimale, che si eseguisce dividendo in due, quindi in cinque, o viceversa. Serve ancora al seguente

180. *Prob.* Descrivere (fig. 90) un triangolo rettangolo i di cui lati siano in proporzione aritmetica.

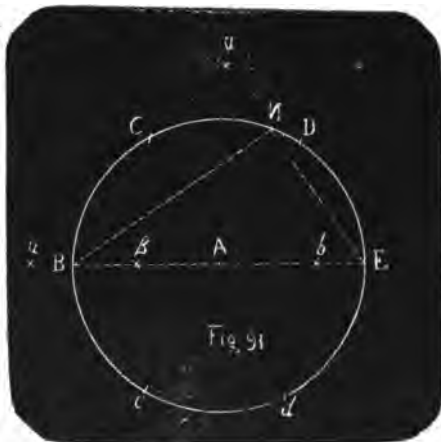
Sol. Fatta la costruzione della soluzione precedente (§ 178),

col centro E, e col raggio EQ si tagli la circonferenza in N. Sarà il triangolo BNE il cercato.

Dim. Esso sarà rettangolo (31, lib. III). Posto poi $AB=1$, sarà $EQ=EA+AQ={}^6/_5=EN$. Ed avendosi $(BE)^2=(EN)^2+(BN)^2$ (47, lib. I), cioè $4={}^{36}/_{25}+(BN)^2$, sarà $(BN)^2={}^{64}/_{25}$, quindi $BN={}^8/_5$, $BE={}^{10}/_5$ in proporzione aritmetica.

181. *Prob.* Descrivere (fig. 91) un triangolo rettangolo, i di cui lati siano in proporzione geometrica.

Fig. 91

Sol. Con un raggio AB, centro A si descriva un cerchio BDd, e si faccia nella sua circonferenza ad $AB=BC==CD=DE=Ed=dc$. Quindi si faccia a $BD=Ba=Ea$, quindi ad $Aa=D\beta=d\beta=Cb=cb$. Ora col raggio $b\beta$, e col centro E si tagli la circonferenza del cerchio in N. Il triangolo BNE sarà il cercato.

Dim. La AB resta divisa in β in estrema e media ragione (§ 46). Quindi se si faccia $AB=1$; $A\beta=x$, si avrà $B\beta=1-x$; $x^2=1-x$; e quindi $x=A\beta={}^1/_2(\sqrt{5}-1)$, donde risulta $b\beta=2A\beta==\sqrt{5}-1=EN$. Si ha poi $(BE)^2=(EN)^2+(BN)^2$ (31, lib. III; 47, lib. I), cioè $4=6-2\sqrt{5}+(BN)^2$. Quindi $(BN)^2=2(\sqrt{5}-1)=BE.NE$. Si ha dunque $BE:BN::BN:NE$ (17, lib. VI). Dunque ecc.

182. *Lemma.* Posti i lati dei cinque poliedri regolari $=1$, sarà il raggio d'una sfera, che contiene

il tetraedro $={}^1/_2\sqrt{{}^3/_2}$,
il cubo $={}^1/_2\sqrt{3}$,
l'ottaedro $={}^1/_2\sqrt{2}$,
il dodecaedro $={}^1/_4\sqrt{3}\,.\,(\sqrt{5}+1)$,
l'icosaedro $={}^1/_2\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Dim. Per la 13, lib. XIII il diametro della sfera, che contiene la piramide compresa da quattro triangoli equilateri, è per potenza sesquialtero del lato della piramide, cioè posto il lato $=1$, è il diametro $=\sqrt{3/2}$; quindi il raggio $={}^1/_2\sqrt{3/2}$.

Per la 15, lib. XIII il diametro della sfera, che contiene il cubo, è per potenza triplo del lato, cioè$=\sqrt{3}$; quindi il raggio$={}^1/_2\sqrt{8}$.

Per la 14, lib. XIII il diametro della sfera, che comprende l' ottaedro, cioè quel corpo regolare, che ha otto faccie tutte triangoli equilateri, è duplo in potenza del lato d'uno di questi triangoli, cioè$=\sqrt{2}$; quindi il raggio$={}^1/_2\sqrt{2}$.

Per la 17, lib. XIII la sfera, che comprende il dodecaedro, cioè quel corpo regolare, che ha dodici faccie tutte pentagoni regolari, comprende anche un cubo, che ha per lato una diagonale di quei pentagoni. Ma la diagonale BN (fig. 64) d' un pentagono $ABLMN$, posto il lato $AB=1$, dico che è$={}^1/_2(\sqrt{5}+1)$. Poichè è (§ 137) $BN=bE=Ab+AE={}^1/_2(\sqrt{5}-1)+1$ (§ 182) $={}^1/_2(\sqrt{5}+1)$. Dunque la BN, ossia la diagonale d' un pentagono, che ha il lato$=1$, è $={}^1/_2(\sqrt{5}+1)$. Se sopra questa si forma un cubo, il diametro della sfera, che lo comprende, sarà di potenza triplo di questa, cioè$={}^1/_2(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}$. Dunque il raggio di questa sfera, che comprende il dodecaedro, è $={}^1/_4\sqrt{3}\,.\,(\sqrt{5}+1)$.

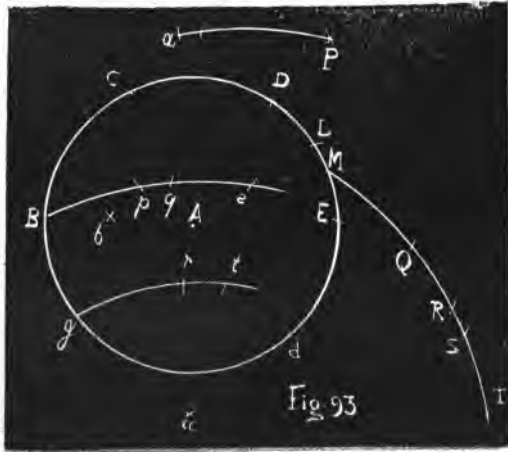
Per la 16, lib. XIII se sia AB il diametro della sfera, che comprende l'icosaedro, e presa (fig. 92) in esso la AC quadrupla di CB, e alzata la perpendicolare CD, che incontra in D la semicirconferenza ADB, se col raggio DB si descrive un cerchio, e in questo cerchio un pentagono regolare, il lato di questo pentagono sarà il lato dell'icosaedro, cioè di quel corpo regolare, che ha venti faccie tutte triangoli equilateri. Ora il lato del pentagono ha quel

rapporto al raggio del cerchio circoscritto, che ha la retta Bb alla BA (fig. 12) (§ 40). Ma posto $AB=1$, si ha $Ab=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$; $(Ab)^2=\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$; $(Bb)^2=(AB)^2+(Ab)^2$ (47, lib. I) $=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Quindi si avrà $Bb:AB::\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}:1$; ma si ha $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}:1::1:\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

Dunque posto il lato dell'icosaedro$=1$, sarà BD (Fig. 92)$=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. Si ha poi $(AB)^2=5(BD)^2$ (16, lib. 13)$=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. Dunque $AB=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, e il raggio $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

183. *Prob.* Dato il lato AB (Fig. 93) dei cinque corpi regolari, trovare il raggio delle diverse sfere, che li comprendono.

Sol. Col raggio AB, centro A, si descriva il cerchio BDd, e si faccia nella sua circonferenza ad $AB=BC=CD=DE=Ed$. Quindi si faccia a $BD=B\alpha=B\alpha=E\alpha=Ea$. Col centro α, e col raggio αa si descriva l' arco aP. Collo stesso centro α, e col raggio αB si descriva l'arco

Fig. 93

$Bpqs$. Collo stesso centro α, e col raggio AB si descriva l'arco grt. Collo stesso centro α, e col raggio BE si descriva l' arco $MQRST$. Col raggio Aa, e coi centri D, d si descrivano due archi, che si taglino in b. Col raggio Ab, e col centro E si tagli la circonferenza in L. Si faccia ad $AB=aP=MQ$, quindi

Aa=*MR*, quindi ad *Eb*=*MS*, quindi a *BL*=*MT*. Si faccia poi ad *aB*=*Pp*, quindi ad *MB*=*Qq*=*Ss*, quindi ad *Mg*=*Rr*=*Tt*. Sarà

Bp	il raggio	il tetraedro
Bq	della sfera,	il cubo
gr	che	l'ottaedro
Bs	comprende	il dodecaedro
gt		l'icosaedro

Dim. Posto $AB=1$. si ha $\alpha a=2\sqrt{2}$ (§ 100), $aB=\sqrt{3}$. Si ha poi $\alpha a : aB :: aP : Bp$ (§ 93), cioè $2\sqrt{2} : \sqrt{3} :: 1 : Bp$. Sarà dunque $Bp={}^1/_2\sqrt{{}^3/_2}$. Quindi ecc. (§ 182).

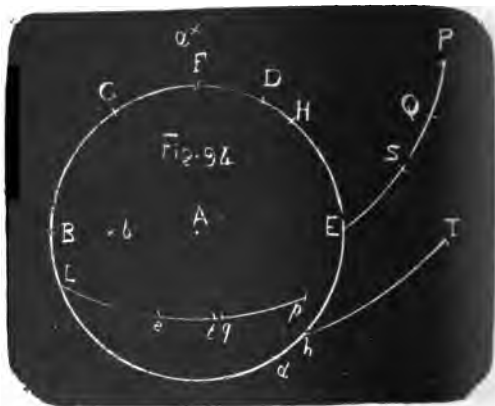
Si ha pure (§ 93) $\alpha M : \alpha B :: MQ : Bq$, cioè $2 : \sqrt{3} :: 1 : Bq$. Quindi $Bq={}^1/_2\sqrt{3}$.

Parimente si ha $\alpha M : \alpha g :: MR : gr$, cioè $2 : 1 :: \sqrt{2} : gr$; quindi $gr={}^1/_2\sqrt{2}$.

Si ha egualmente $\alpha M : \alpha B :: MS : Bs$. Ma $MS=bE={}^1/_2(\sqrt{5}+1)$ (§ 182), dunque $2 : \sqrt{3} :: {}^1/_2(\sqrt{5}+1) : Bs$. Quindi $Bs = {}^1/_4\sqrt{3}\,.\,(\sqrt{5}+1)$.

Si ha finalmente $\alpha M : \alpha g :: MT : gt$. Ma $MT = BL$. È poi $(BL)^2=(BE)^2-(EL)^2$ (31, lib. III; 47 lib. I), cioè $(BL)^2=(BE)^2-(Ab)^2=4-{}^1/_2(3-\sqrt{5})$ (§ 182)$=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ Quindi $BL = MT = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$; e però $2 : 1 :: \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} : g\,t$; e quindi $g\,t = {}^1/_2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Dunque le distanze *Bp*, *Bq*, *gr*, *Bs*, *gt* saranno rispettivamente i raggi delle sfere, che comprendono i cinque corpi regolari piramide, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

184. *Prob*. Dato

il raggio AB (Fig. 94) della sfera, che comprende i cinque corpi regolari, trovare i lati di essi.

Sol. Sia col raggio AB, centro A, descritto il cerchio massimo della sfera BDd, e sia fatto nella sua circonferenza ad $AB=BC=CD=DE=Ed$. Quindi a $BD=Ba=Ea$; quindi ad $Aa=Db=db$.

Si faccia poi nella circonferenza ad $AB=aH$, quindi ad $Aa=EF=Hh$. Col centro a, e col raggio aE si descriva l'arco $ESQP$. Collo stesso centro a, e col raggio BE si descriva l'arco $Lstqp$. Collo stesso centro a, e col raggio ah si descriva l'arco hT. Si faccia ad $Aa=EP$; ad $AB=EQ$; ad $Ab=ES$; a $bF=hT$. Quindi si faccia ad $EL=Pp=Qq=Ss$; quindi ad $hL=Tt$. Sarà

Lp	il lato	tetraedro
Lq	del	cubo
Aa		ottaedro
Ls		dodecaedro
Lt		icosaedro

Dim. Si ha l'arco Eh eguale ad una ottava parte della circonferenza (§ 30); quindi $ah=\sqrt{5}$ (§ 186). Essendo poi retto l'angolo bAF, lo stesso che BAF per essere il punto b sulla AE (§§. 13, 27), sarà bF il lato del pentagono (§ 40), Ab il lato del decagono inscritto al cerchio BDd (§ 41). Posto dunque $AB=1$, sarà $Ab=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (§ 181), $(bF)^2=(AF)^2+(Ab)^2=1+\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$; quindi $bF=hT=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Si avrà poi $aE:aL::EP:Lp$ (§ 93), cioè $\sqrt{3}:2::\sqrt{2}:Lp$. Sarà dunque $Lp=2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ora il rapporto del raggio della sfera al lato del tetraedro contenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}:1$ (§ 182) $::1:2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Posto dunque il raggio AB della sfera$=1$; sarà Lp il lato del tetraedro contenuto.

Si avrà pure (§ 93) $aE:aL::Eq:Lq$, cioè $\sqrt{3}:2::1:Lq$; quindi $Lq=2\sqrt{\frac{1}{3}}$. Ora il rapporto del raggio della sfera al lato del cubo contenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{3}:1$ (§ 182) $::1:2\sqrt{\frac{1}{3}}$. Dunque ecc.

Si avrà parimente $Aa=\sqrt{2}$ lato dell'ottaedro. Poichè il

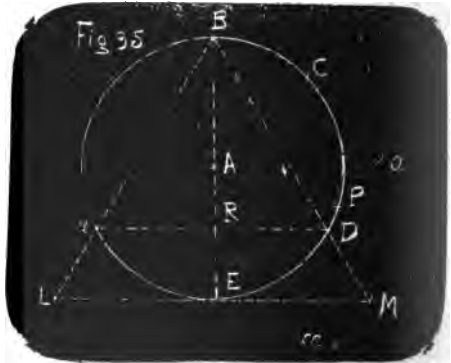
rapporto del raggio della sfera al lato dell' ottaedro contenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{2} : 1$ (§ 182) $: : 1 : \sqrt{2}$. Dunque ecc.

Egualmente si avrà $aE : aL : : ES : Ls$, cioè $\sqrt{3} : 2 : : \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) : Ls$; quindi $Ls = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$. Ora il rapporto del raggio della sfera al lato del dodecaedro contenuto è$=\frac{1}{4}\sqrt{3}.\ (\sqrt{5}+1) : 1$ (§ 182) $: : 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$. Dunque ecc.

Finalmente si avrà $ah : aL : : hT : Lr$ (§ 93), cioè $\sqrt{5} : 2 : : \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} : Lt$. Quindi $Lt = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$. Ora il rapporto del raggio della sfera al lato dell' icosaedro contenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} :$ (§ 182) $: : 1 : 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$. Dunque ecc.

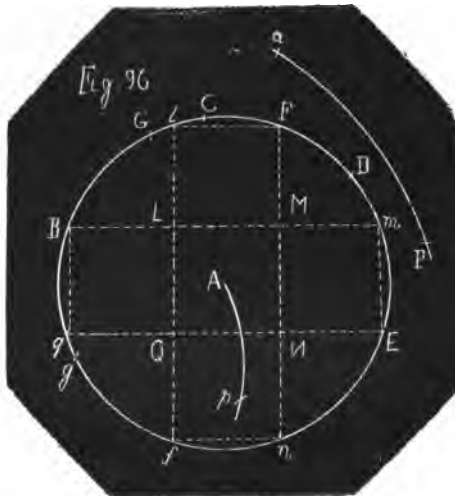
185. *Prob.* Dato un punto B (Fig. 95) nella circonferenza di un cerchio dato; trovare altri due punti L ed M, tali che il triangolo BLM sia equilatero, e tocchi il cerchio col lato LM alla metà di esso lato in E.

Sol. Si faccia al raggio del cerchio dato $AB = BC = CD = DE = Ed$ nella circonferenza di esso. Quindi si faccia a $BD = Ba = Ea$. Col centro a; e col raggio aA si descriva un arco, che passi per α. Col centro E, e col raggio EA si descriva un arco, che lo tagli in α. Collo stesso raggio αE, e col centro α si tagli la circonferenza in P. Ora col raggio EP, e col centro E si descriva un arco, che passi per L ed M. Col raggio aP, e coi centri D e d si segnino due archi, che taglino il precedente in L ed M. Saranno L ed M i due punti cercati.

Dim. Confrontando i punti a, A, E, α, P di questa figura 95 coi

punti Q,A,p,B,P della figura 3 dall'equazione $(AQ)^2=(Ap)^2+(pQ)^2-pP.pQ$ appartenente alla fig. 3 (§ 17) si ricaverà l'equazione per questa figura 95, $(Aa)^2=(AE)^2+(Ea)^2-EP.Ea$. Quindi (§ 27) $2=1+3-EP.\sqrt{3}$. Quindi $2=EP.\sqrt{3}$; ed $EP={}^2/_3\sqrt{3}$. Essendo poi i tre punti E, P, a nella stessa retta (§ 13), sarà $Pa=Ea-EP={}^1/_3\sqrt{3}$.

Si supponga guidata la BE, che tagli in R la Dd; sarà (§ 104) $BR={}^3/_2$; $RD={}^1/_2\sqrt{3}$; $BE=2$; quindi la quarta proporzionale alle tre BR, RD, BE sarà $={}^2/_3\sqrt{3}=EM$. Sarà pure (§ 104) $RE={}^1/_2$, $BD=\sqrt{3}$ (§ 2). Quindi la quarta proporzionale alla tre BR, BD, RE sarà $={}^1/_3\sqrt{3}=DM$. Saranno dunque le EM, DM della quantità richiesta, perchè il triangolo BEM riesca simile al triangolo BRD (2, lib. VI). Dunque saranno simili, poichè il punto M non potrebbe cascare in altro luogo (8, lib. I). Si proverà nella stessa maniera, che il triangolo BRd è simile al triangolo BEL. Quindi il triangolo BDd è simile al triangolo BML (20, lib. VI). Dunque anche questo è equilatero. Sono inoltre retti gli angoli BEM, BEL eguali agli angoli BRD, BRd, e sono eguali le rette EM, EL. Dunque il triangolo BLM è il cercato.

186. *Prob.* In un cerchio (fig. 96) di raggio dato AB inscrivere cinque quadrati eguali, de' quali uno sia concentrico al cerchio, e gli altri lo tocchino, avendo ciascuno un lato comune col quadrato di mezzo.

Sol. Si facciano al raggio AB eguali le corde BC, CD, DE. Si faccia a $BD=Ba=Ea$. Ad Aa si facciano eguali le corde BF, Bf. Col raggio AB, e col centro a si tagli il cerchio in G, e si faccia ad Aa eguale la corda Gg. Col

raggio ga, **e col centro** g **si descriva un arco** aP, **e si faccia sotto esso la corda** $aP=aA$. Collo stesso centro g, e col raggio gA **si descriva un arco** Ap sulla direzione dell'arco aP. Si faccia ad $aA=Pp$. Si facciano ora ad Ap eguali le corde Bq, fn, Em, Fl. Collo stesso raggio Ap, e coi centri B, q, f, n, E, m, F, l si descrivano degli archi, che si taglino dentro il cerchio in L, Q, N, M. Sarà $LMNQ$ il quadrato centrale, $BLQq$, $fQNn$, $ENMm$, $FMLl$ gli altri quadrati cercati.

Dim. Se si confrontino i punti a, A, G, B, q di questa figura coi punti Q, p, A, R, S della figura 4, si avrà dal § 21 l'equazione per questa figura 96, $(ag)^2=(aB)^2+Gg\,.\,Aa$. Cioè posto il raggio $AB=1$, $(ag)^2=3+2=5$ (§ 27); quindi $ag=\sqrt{5}$. È poi $aP=aA=\sqrt{2}$. Ora si ha $ga:aP::gA:Ap$ (§ 93), cioè $\sqrt{5}:\sqrt{2}::1:Ap$. Quindi $Ap=\sqrt{2/5}=Em$. Essendo poi $BCDE$ una semicirconferenza (§ 64), sarà BmE un angolo retto (31, lib. III), quindi $(BE)^2=(Bm)^2+(mE)^2$; cioè $4=(Bm)^2+{}^2/_5$. Quindi $(Bm)^2=9\,.\,{}^2/_5$, e $Bm=3\sqrt{2/5}=3mE$. Dello stesso valore si troverà essere qE, e si dimostrerà esser retti tutti gli altri angoli del quadrilatero $BmEq$, che sono in semicerchj. Dunque esso è un parallelogrammo rettangolo. Istessamente si dimostra essere un parallelogrammo rettangolo $Flfn$. Se si faccia la corda $Em=k$, sarà mF corda del complemento al quadrante $=h$ (§ 159), e si avrà $h^2=2-2k\sqrt{1-{}^1/_4k^2}$. Quindi essendo $k^2={}^2/_5$, si avrà $h^2=2-2k\sqrt{9/10}=2-2\sqrt{9/25}=2-{}^6/_5={}^4/_5=2k^2$, cioè $(Fm)^2=(FM)^2+(Mm)^2$. Quindi l'angolo FMm sarà retto (48, lib. I); così gli altri BLl, fQq, ENn. Se poi si chiami x la distanza del punto m dal punto dove cade la perpendicolare da F sopra la Bm, si avrà (13, lib. II) $(BF)^2=(Fm)^2+(Bm)^2+2Bm\,.\,x$, cioè $2={}^4/_5+{}^{18}/_5-6x\sqrt{2/5}$. Quindi $x\sqrt{2/5}={}^2/_5$, e dividendo per $\sqrt{2/5}$, si ha $x=\sqrt{2/5}=mM$. In seguito se si chiami y la perpendicolare, che da F cade sulla Bm, si avrà $y^2=(Fm)^2-x^2={}^4/_5-{}^2/_5={}^2/_5$; quindi $y=\sqrt{2/5}=FM$. Quindi si dimostra essere il punto M sulla Bm. Egualmente si dimostra esservi il punto L. Essendo dunque $Bm=3Em=Mm+BL+Em$; sarà anche $LM=Em$. Si dimostrano poi dello stesso valore gli altri lati MN, NQ, LQ. Dalle cose dette fin qui resta pur dimostrato essere retti gli angoli ai punti L, M, N, Q esterni al quadrilatero $LMNQ$,

dunque lo saranno anche gli interni, e si avranno i cinque quadrati, che si volevano.

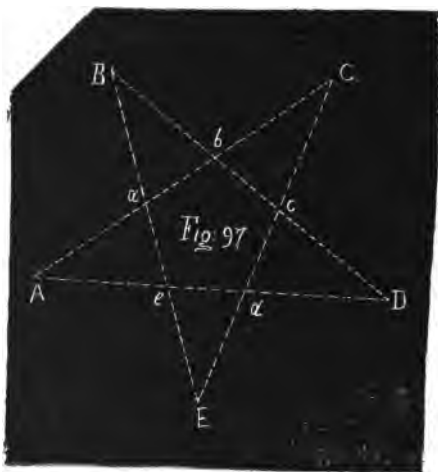
187. *Prob.* Dati (fig. 97) i cinque punti A, B, C, D, E estremi di un pentagono regolare; trovare i cinque punti a, b, c, d, e, nei quali si taglierebbero le diagonali di esso pentagono.

Sol. Col lato del pentagono AB preso per raggio, e coi centri A, B, C, D, E si segnino degli archi, che si taglino in a, b, c, d, e. Sarà fatto.

Dim. Se si suppongano condotte le diagonali, e segnati i lati del pentagono $ABCDE$, si avrà l'angolo $BAC = BDA$ (29, lib. III) $= CAD$. Quindi $Ab = bD$ (6, lib. I). Si avrà poi $BbA = bDA + bAD$ (32, lib. I) $= BAb + bAD = BAD = ABD$ (5, lib. I). Quindi il triangolo ABb sarà isoscele (6, lib. I), cioè sarà $AB = Ab = bD$. Dunque ecc.

Questa figura è il pentalfa, ossia l'igìa di Pitagora.

188. *Prob.* In un cerchio (fig. 98) di raggio dato AB inscrivere sei pentagoni regolari.

Sol. Si faccia nella circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Quindi a $BD = Ba = Ea$. Quindi ad $Aa = BF = Db = db$. Si

faccia nella circonferenza a $bF = BP = PQ = QR = RS$. Collo stesso raggio bF, e coi centri B, P, Q, R, S si segnino degli archi, che si taglino in β, p, q, r, s. Ora col raggio βp, e coi centri β, P si segnino due archi, che si taglino c. Collo stesso raggio, e coi centri P, p si segnino due archi, che si taglino in d. Si avranno due dei pentagoni cercati, cioè $\beta pqrs$, pentagono al centro A, e $\beta pdPc$, che tocca il cerchio dato in P. Nella stessa guisa si troveranno i vertici, che mancano agli altri quattro pentagoni $pqfQe$, $qrhRg$, $rskSi$, $s\beta mBl$.

Dim. Saranno i punti B, P, Q, R, S estremi di un pentagono regolare inscritto al cerchio dato (§§ 40, 128). Quindi saranno i punti β, p nella diagonale BQ; i punti p, q nella diagonale PR (§ 187), ed essendo $Bp = \beta Q$, sarà $B\beta = pQ$. Istessamente si proverà $Pp = qR$, e per essere $BQ = PR$ (27, lib. III), sarà anche $B\beta = Pp$ e $\beta p = pq$. Istessamente si proverà, che sono uguali tra loro tutti i lati del pentagono $\beta pqrs$. Si ha poi l'angolo βpq, cioè $BpR = BPR + PBp$ (32, lib. I); ma PBp cioè $PBQ = QPR$. Dunque $\beta pq = BPQ$. Istessamente si dimostra, che gli altri angoli del pentagono $\beta pqrs$ sono eguali agli angoli del pentagono $BPQRS$. Dunque sono entrambi regolari. Si avrà inoltre l'angolo QBR, formato da due diagonali del pentagono $BPQRS$, che è l'angolo βBs, eguale all'angolo βqs formato da due diagonali del pentagono $\beta pqrs$ (20, lib. VI). Quindi essendo isosceli entrambi i triangoli βBs, βqs, avranno eguali tra loro anche gli angoli alla base comune βs (5, 32, lib. I); quindi anche i triangoli saranno in tutto eguali (26, lib. I). Quindi i triangoli $Bm\beta$, βpq, avendo tutti i lati eguali tra loro, avranno eguali anche gli angoli (8, lib. I), come pure i triangoli Bls, srq. Quindi tutti i lati e gli angoli del pentagono $Bm\beta sl$ saranno eguali ai lati e agli angoli del pentagono $\beta pqrs$, e però entrambi saranno regolari. Lo stesso si dimostra degli altri pentagoni $\beta cPdp$, $peQfq$, $qgRhr$, $riSks$. Dunque ecc.

189. Il punto b sarà centro del pentagono $\beta mBls$, e la distanza bB raggio del cerchio circoscritto ad esso pentagono, e agli altri eguali, come dimostreremo subito; il che aggiunge una nuova bella proprietà al punto b già rimarcato tante volte in questa Geometria. Poichè oltre alle divisioni in estrema e media ragione, che per esso nascono nel diametro BAE (§§ 45,

46), e la determinazione fatta per esso della bF lato del pentagono inscritto al cerchio di raggio AB (§ 40), e della bA lato del decagono inscritto allo stesso cerchio (§ 41); si ha ancora Bb raggio del cerchio circoscritto ai sei pentagoni, che si possono inscrivere al maggior cerchio di raggio AB, come nel presente Problema. Difatti posto il raggio $AB=1$, si ha $Ab=$ $=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (§ 181); essendo poi $(BE)^2=(BQ)^2+(QE)^2$ (31, lib. III) $=(BQ)^2+(Ab)^2$; ne verrà $BQ=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Si ha poi $\beta Q=BP=$ $=bF=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ (§ 182). Quindi $BQ:\beta Q::BQ.\beta Q:(\beta Q)^2::\sqrt{5}:$ $\frac{5-\sqrt{5}}{2}::1:\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)::BA:bA$. Quindi $BQ:BQ-\beta Q::BA:$ $BA-bA$, cioè $BQ:B\beta::BA:Bb$. Saranno dunque le due diagonali dei pentagoni $BPQRS$, $Bm\beta sl$ tra loro come $BA:bA$. Essendo dunque BA raggio del primo pentagono; sarà Bb raggio del secondo (20, lib. VI).

190. *Prob.* Dati (fig. 99) i vertici di un esagono regolare $BCDEdc$; trovare i punti l, m, n, g, p, q, nei quali si tagliano le sue diagonali, che non passano pel centro.

Sol. Si faccia a $BD=Ba$ $=Ea$; quindi a $BC=BA=CA$ $=B\alpha$; ad $aA=a\alpha$; ad $\alpha B=\alpha P$ $=AP$. Ora col raggio aP, e coi centri B, C si segnino due archi, che si taglino in l; coi centri C, D altri due, che si taglino in m, e così via via. Saranno questi i punti cercati.

Dim. Si supponga, che le diagonali indicate si taglino in l, m, n, g, p, q. Essendo l'angolo $BDc=DcE$ (29, lib. III), sarà BD parallela a cE (29, lib. I). Sarà dunque il triangolo Clm simile al triangolo CcE (2, 5, lib. VI), e però equilatero. Istes-

samente lo sarà il triangolo Blq simile al triangolo BDd. Essendo poi il triangolo CcE eguale al triangolo BdD, per avere i lati eguali a quelli di esso (§ 2) (8, 4, lib. I), ed essendo il lato BD, e quindi lm, egualmente distante dal lato cE che il lato Cc, e quindi ql, dal lato dD (14, lib. III), se si sovrapponga il triangolo BdD al triangolo CcE, la retta ql cascherà sulla retta lm e le sarà eguale. Ma è $Bl=lq$. Dunque $Bl=lm$. Istessamente si dimostra, che è $Dm=ml$. Dunque è $Bl={}^1/_3 BD$ $={}^1/_3\sqrt{3}$ (ponendo il raggio del cerchio $BC=AB=1$) (§ 2). Istessamente $Cl={}^1/_3\sqrt{3}$. Ma si sono appunto prese $Bl=Cl=aP={}^1/_3\sqrt{3}$ (§ 185). Dunque l è uno dei punti cercati. Lo stesso si dimostra degli altri punti m, n, g, p, q. Dunque ecc.

191. *Prob.* Nel cerchio (fig. 100) di raggio dato AB inscrivere sette esagoni regolare, uno dei quali sia concentrico al cerchio, e gli altri siano disposti intorno ad esso.

Sol. Si faccia nella circonferenza del cerchio dato ad $AB=BC=CD=DE=Ed$. Quindi a $DB=DV=dV$. Col raggio CV, e coi centri C ed A si segnino due archi, che si taglino in P. Collo stesso raggio PC, centro P si tagli la circonferenza del cerchio dato in δ. Sarà $d\delta$ il lato degli esagoni da inscriversi, i quali si inscriveranno facilmenmente uno presso l'altro. Poichè collo stesso lato $d\delta$ preso per raggio, e coi centri d, δ si segnino due archi, che si taglino in α. Collo stesso raggio, e col centro α si descriva un cerchio, dentro il quale si inscriva un esagono regolare (15, lib. IV) $d\delta mnpq$. Collo stesso raggio, e col centro A si descriva un cerchio, che

passerà per np. In esso si descriva l'esagono, che ha per uno dei lati pn. Sopra i lati di questo esagono si descrivano gli altri esagoni, come si è fatto da prima sul lato $d\delta$, e sarà fatto quanto volevasi.

Dim. Posto per brevità $AB=1$; sarà $CP=CV=\sqrt{7}$ (§ 100) $=AP$. Sarà poi $AP : A\delta :: A\delta : \delta d$ (§ 86); cioè $\sqrt{7} : 1 :: 1 : \delta d$; quindi $\delta d=\sqrt{1/_7}$.

Si suppongano per un momento inscritti gli esagoni cercati, e sia l'incognita $d\delta$ lato di essi $= x$; si divida essa per metà in v, e si guidi la Av, che le sarà perpendicolare (§ 83), e passerà per α centro dell'esagono, di cui è lato $d\delta$, tagliando pure per metà in μ il lato pn dell'esagono centrale. Essendo nel triangolo equilatero Apn, $pn : A\mu :: 1 : {}^1/_2\sqrt{3}$ (§ 104); si avrà $x : A\mu :: 1 : {}^1/_2\sqrt{3}$, quindi $A\mu={}^1/_2x\sqrt{3}$, e quindi $Av=3A\mu={}^3/_2x\sqrt{3}$; è poi $dv = {}^1/_2x$. Essendo poi $1 = (Ad)^2 = (Av)^2 + (dv)^2$; sarà $1 = {}^{27}/_4x^2+{}^1/_4x^2=7x^2$; quindi $x^2={}^1/_7$, ed $x=\sqrt{1/_7}$, della quale grandezza si è appunto determinata la $d\delta$ nella Soluzione del Problema, come si è dimostrato qui sopra. Dunque ecc.

Questo Problema si trova in *Pappo*, lib. VIII, Prob. 15, Prop. 19, sciolto colla riga e col compasso non più semplicemente di così. Egli vi ha pure aggiunta una costruzione meccanica.

192. Noi crediamo di avere omai adempito quanto abbiamo promesso ai §§ 6 e 7. E quanto al primo punto abbiamo già dati tutti gli elementi della *Geometria del Compasso*; cioè tutti que' Problemi, che bastano a potere col solo compasso senza la riga trovare tutti que' punti, che si possono trovare col compasso e colla riga insieme. Per dimostrar questo (§ 71) si osservi: primo, che per via della Geometria Elementare i punti d'un Problema si trovano o colla sezione degli archi fra loro, e questa è tutta cosa propria della Geometria del compasso, o colle sezioni degli archi e delle rette, o delle rette fra loro, e tutto questo articolo vien ad essere compreso dal Libro Settimo § 110 e seguenti. Una retta poi qualunque, che sia necessaria alla Soluzione d'un Problema, viene determinata dalla grandezza e dalla posizione. Per rapporto alla grandezza abbiamo insegnato ad ingrandire, diminuire, dividere qualungue grandezza finita in qualunque numero di parti nel Libro Terzo § 64

e seguenti, e nel Libro Quarto §§ 72, 73 e 74; a trovare poi le terze, le quarte, le medie proporzionali, così parimente a dividere una retta in qualunque ragione data, nel lib. V § 86 e seguenti. Riguardo alla posizione delle rette, essa si determina per via della posizione di due punti per ciascuna; ora servirà il Libro Quarto § 76 e seguenti a ritrovare i punti per ogni caso delle perpendicolarj e delle parallele. Per collocar le rette tra loro ad ogni altro angolo dato per via di due punti, somministrerà quanto è necessario il Lib. VIII § 113 e seguenti. La divisione della circonferenza del cerchio e d'ogni arco in ogni maniera possibile alla Geometria Elementare è esaurita nel Libro II § 27 e seguenti. Dopo tutto ciò non veggo quale altro elemento si possa desiderare. Quanto poi riguarda la scelta dei Problemi, che abbiamo qui raccolti, lascieremo che i Matematici giudichino, se in un gran numero di casi utili o dilettevoli non sia pregio dell'opera, non solo per la precisione del risultato, ma ancora per la speditezza della costruzione, abbandonare la riga, e servirsi del solo compasso fino a quel termine, che trovati tutti i punti necessarj al Problema, si abbia, se ciò bisogna, a condurre da un punto all' altro una o più rette, le quali certo col solo compasso segnar non si possono, ed abbisognano della riga.

LIBRO DUODECIMO

PROBLEMI PER APPROSSIMAZIONE

193. Tutti i Problemi superiori al secondo grado non si possono sciogliere geometricamente colla sola riga e col compasso; ma richieggono intersezioni di curve coniche o di gradi superiori; quindi non si possono risolvere nemmeno colla sola Geometria del Compasso esattamente. Gli stromenti per descrivere la cicloide, la concoide, la ciffoide, la trattoria, ed altre tali curve, che servono alla risoluzione di que' Problemi, benchè inventati con grande ingegno e riusciti nella pratica eleganti e spediti, non ostante quando non si tratti di avere tutto l'andamento di quella curva, alla quale sono destinati, ma solo di ottenere un punto coll' intersezione di quella con altre linee,

lasciano certo in pratica tale dubbio di piccoli errori, talvolta non ben calcolabili, che si avrà in moltissimi casi a preferire all'esattezza teorica di que' metodi un'approssimazione pratica abbastanza grande d'una costruzione fatta col compasso e colla riga. In questi casi dico, che il maggior numero delle volte sarà preferibile ancora una risoluzione ottenuta col solo compasso. Gli esempj lo mostreranno a chi vorrà fare il confronto delle nostre Soluzioni colle già conosciute.

194. Non essendovi finora metodo generale per ottenere colla Geometria Elementare queste approssimazioni, non si dovrà aspettare, che nemmeno io ne proponga uno per la mia *Geometria del Compasso*. Io non chiamo metodo Geometrico di approssimazione quello di ottenere prossimamente un valore coll'ajuto d'una di quelle scale, che si dicono geometriche, poichè all'uso di essa dovendo precedere un calcolo aritmetico; il metodo stesso si deve piuttosto chiamare aritmetico. Si supponga, per esempio, che si voglia la radice cubica del numero 2; l'estrazione, che si vuol fare aritmeticamente di questa radice per poter poi prendere le parti decimali o rotti di altra natura sopra una scala geometrica col compasso, ad oggetto di duplicare qualche cubo, fa sì, che il ripiego sia di ragione dell' Aritmetica, piuttosto che della Geometria.

195. Io non ho potuto specolare finora altro mezzo di ottenere prossimamente la soluzione di molti Problemi utili, superiori al secondo grado, fuori di quello di trovare varj generi, e come classi di costruzioni di figure elementari; quindi di assoggettare al calcolo il più gran numero che si possa, dei casi particolari pressochè innumerabili, che ne risultano. Tra essi scegliere quelli, che servono meglio all'intento, e adoperarli a risolvere il Problema.

196. Di questi generi, e quasi classi di costruzioni io ne ho esaminate molte, e tengo a parte delle ricerche sulle medesime. La più semplice classe e quella, della quale quasi unicamente faremo uso in quest'ultimo Libro della nostra Geometria, è fondata sui tre punti memorabili *a, b* ed *e* (fig. 9, 11 e 12) (§ 59), che ci hanno già servito tanto ne' libri antecedenti, e sui quali venghiamo ad esporre le dodici equazioni da noi promesse (§ 59).

197. Sia (fig. 12) il punto *Z* considerato per un punto qua-

lunque preso sul quarto di circonferenza BF nella figura 1ª costruita come nel lib. II, e nell'altro quarto Bf sia il punto z, cosicchè si abbia $Bz=BZ$. Si avrà (§§ 20 e 21).

$$(A) \ldots (aZ)^2=(aB)^2-Zz \,.\, Aa,$$
$$(B) \ldots (bZ)^2=(bB)^2+Zz \,.\, Ab,$$
$$(E) \ldots (eZ)^2=(eB)^2-Zz \,.\, Ae.$$

198. Se vogliamo le equazioni per le distanze dei tre punti a, b ed e dal punto z, non si avranno, che a cambiare i segni nel secondo membro delle equazioni antecedenti, e si avrà (§§ 20 e 21)

$$(A') \ldots (az)^2=(aB)^2+zZ \,.\, Aa,$$
$$(B') \ldots (bz)^2=(bB)^2-zZ \,.\, Ab,$$
$$(E') \ldots (ez)^2=(eB)^2+zZ \,.\, Ae.$$

199. Essendo Zz, corda dell'arco doppio di $BZ,=2$ sen BZ; ed essendo nella supposizione di $AB=1$, che noi sempre riterremo, $(aB)^2=(BD)^2=3$ (§ 2); $(Aa)^2=2$ (§ 27); $(Bb)^2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ (§ 182); $(Ae)=2-\sqrt{2}$ (§ 38), quindi $(eB)^2=(AB)^2+(Ae)^2=3-\sqrt{2}$; $Ab=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (§ 181); se si faccia $aZ=a$, si avrà $(A') \ldots\ldots$ $a^2=3-2 \text{ sen } A.\sqrt{2}$; comprendiamo sotto questa equazione anche il caso, che l'arco A sia negativo, cioè Bz, nel quale il segno $-$ prefisso a $2 \text{ sen } A.\sqrt{2}$ si cambia in $+$.

200. Il valore di a può sempre essere quello d'una qualche corda del cerchio BDd, fuori che nel caso, che la distanza az espressa per a superi il valore di 2. Per calcolare più facilmente il valore di a in questi casi, essendo $\sqrt{2}=BF=2 \text{ sen } 45°$, e $2 \text{ sen} A \;\; \text{sen} 45° = \cos(A-45°)-\cos(A+45°)=\cos(45°-A)-$ $-\text{sen}(45°-A)$ (§ 159), si avrà

$$(*) \;\; a^2=3-2\cos(45°-A)+2\text{sen}(45°-A).$$

201. Negli altri casi, nei quali a è minore di 2, chiamando A' quell' arco, del quale a è corda, si avrà $\frac{a^2}{4}=\text{sen}^2 \frac{1}{2} A'=$ $=\frac{1-\cos A'}{2}$ (156) $=\frac{3}{4}-\text{sen} A.\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}-\text{sen} A \,.\, \cos 45°$; quindi riducendo $\cos A'=2\text{sen} A \,.\, \cos 45°-\frac{1}{2}$; quindi ancora (§ 157)

$$\cos A'=\text{sen}(A+45°)+\text{sen}(A-45°)-\text{sen} 30°,$$

ovvero

$$(1) \qquad \cos A'=\cos(45°-A)-\text{sen}(45°-A)-\text{sen} 30°.$$

202. Se si vuole far servire questa equazione (1) alla divisione della circonferenza in quelle parti, che non si possono ottenere con precisione, si introdurrà in luogo di A un arco preciso, per esempio la ventesima parte (fig. 12) della circonferenza $= 18°$, supponendo $BZ=18°$, e si avrà $\cos A' = \cos 27° - \text{sen}27° - \text{sen}30°$.

$$
\begin{array}{lr}
\text{Ora} & \text{sen}27°=0,4539905 \\
& \text{sen}30°=0,5 \\
\hline
& 0,9539905 \\
& \cos 27°=0,8910065 \\
\hline
\text{Quindi} & \cos A' = -0,0629840
\end{array}
$$

Si trova poi sulle tavole $0,0629840=\text{sen}3°\ 36'\frac{1935}{2903}$. Ora essendo $\frac{1935}{2903}$ così vicino al valore di $^2/_3$, che non v'è l'errore nemmeno d'una unità intera nell'ultima cifra del numero 1935, si potrà prendere 0,0629840 pel seno di $3°\ 36'\ 40''$ senza poter decidere colle tavole comuni, se vi sia pure l'errore di un minuto terzo. Quindi l'arco A', che ha questo coseno negativo, sarà$=93°\ 36'\ 40''$, e di quest'arco sarà corda la distanza aZ posto $BZ=18°$. Applicando dunque la distanza aZ presa sul compasso per corda alla circonferenza, si determinerà un tal arco$=93°\ 36'\ 40''$, assai prossimamente.

203. Per indagare l'errore, che sfugge ai numeri delle tavole comuni, si consideri, che essendo il seno di 18° eguale alla metà della corda della decima parte della circonferenza, cioè $={}^1/_2 Ab={}^1/_4(\sqrt{5}-1)$, e il coseno di $45°={}^1/_2\sqrt{2}$, l'equazione $\cos A' = 2\text{sen}A\cos 45° - {}^1/_2$ del § 201 da $\cos A'={}^1/_4\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)-{}^1/_2={}^1/_4(\sqrt{10}-\sqrt{2})-{}^1/_2=0,0629839824$. Calcolato poi con più cifre anche il seno di $3°\ 36'\ 40''$, si trova $=0,062984061154$. Attenendosi solamente a otto cifre decimali, si trova $\text{sen}3°\ 36'\ 39''=0,06297921$. La differenza per 1'', ossia per 60''' è 485. Se dunque 485 dà 60''', 8 darà $\frac{96'''}{97}$; non darà dunque un intero minuto terzo. Dunque l'arco, del quale è corda la distanza aZ, non è maggiore di $93°\ 36'\ 40''$ di un intero minuto terzo.

204. Posto tutto ciò, ecco l'uso, che si potrebbe fare di questo valore per la divisione antica del cerchio. Lasciamo stare, (fig. 12) che potrebbe servire a dividere in tre un minuto primo

in que' cerchj, dove fossero notati i minuti primi, poichè si troverebbero i 40'', cioè i $\frac{2}{3}'$ tra un minuto primo e l' altro seguente, e ciò senza l' errore di un minuto terzo; esso può anche servire a trovare la terza parte di un grado. Poichè essendo l'arco $cBN = 90^\circ$ ed $Np = 3^\circ$ (§§ 31, 43), se preso $BZ = Kp$, nel qual caso riuscirà l'arco $BZ = 18^\circ$ (§ 32), col raggio aZ, fatto centro in c si descriverà un arco, esso taglierà la circonferenza tra p e P in un punto distante da p di $36'\ 40''$ col piccolo errore calcolato. Si chiami y questo punto, e si triplichi per esempio l'arco $Ny = 3^\circ\ 36'\ 40''$. Avremo un arco $= 10^\circ\ 50'$ senza l'errore di tre minuti terzi, e se questa triplicazione si è fatta da N verso G, caderà l' ultima divisione tra π e φ. Si chiami η il punto, dove esso cade, cosicchè $N\eta = 10^\circ\ 50'$. Si chiami poi μ il punto, che è alla metà dell'arco $\pi\varphi$ ottenuto col § 58. Sarà l'arco $\mu\eta = 20'$ senza l'errore di tre minuti terzi, cioè si avrà ottenuto un terzo di grado antico con tanta precisione, ch'io non so, se abbiasi per la pratica a desiderarsene una maggiore.

205. Noi abbiamo tratto quest' esempio dalla lista di tutti i valori di $\cos A'$ calcolati, introducendo nell' equazione (1) in luogo di A successivamente 90°, $88^\circ\ 30'$, 87°, e così in seguito fino a 0°, quindi $-1^\circ\ 30'$, -3° ecc. fino a $-19^\circ\ 30'$ inclusivamente; oltre il qual caso non ha più luogo l'equazione (1) venendo i suoi valori maggiori di 1.

206. Ora proseguiremo a trovare le altre equazioni. Ogni distanza del punto b dai punti della circonferenza, riuscendo minore del diametro 2, potrà essere corda di un arco. Questo arco, di cui la bZ è corda si chiami B'; si avrà $^1/_2\, bZ = \text{sen}\, ^1/_2 B'$, e chiamando B l'arco BZ, si avrà $Zz = 2\text{sen}B$, quindi dall' equazione (B) del § 197, divisa per 4, risulterà $\text{sen}^2\, ^1/_2 B' =$
$= \frac{1-\cos B'}{2}$ (§ 156) $= \frac{5-\sqrt{5}}{8} + \text{sen}B . \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Quindi $\cos B' = 1 -$
$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right) - \text{sen}B . \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 - 2\text{sen}^2\, 36^\circ - 2\text{sen}B\, \text{sen}18^\circ = \cos 72^\circ -$
$\cos(B-18^\circ) + \cos(B+18^\circ)$ (§§ 156, 159). Si avrà dunque

(2) $\qquad \cos B' = \text{sen}18^\circ + \cos(B+18^\circ) - \cos(B-18^\circ).$

207. Parimente se si chiami E' l' arco, del quale è corda la eZ, ed E l'arco BZ, si avrà dall'equazione (E) (§ 197)

$\operatorname{sen}^2 {}^1/_2 E' = \frac{1-\cos E'}{2} = \frac{3-\sqrt{2}}{4} - \operatorname{sen} E . \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Quindi ne viene

$$\cos E' = \sqrt{{}^1/_2} - {}^1/_2 + 2\operatorname{sen} E . \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \operatorname{sen}45^\circ - \operatorname{sen}30^\circ + 2\operatorname{sen}E\operatorname{sen}22^\circ\ 30'.$$

Quindi finalmente

(3) $$\cos E' = \operatorname{sen}45^\circ - \operatorname{sen}30^\circ + \cos(E - 22^\circ\ 30') - \cos(E + 22^\circ\ 30').$$

208. Per via di queste tre equazioni coll'ajuto delle tavole dei seni e dei coseni naturali , dato un arco A, B ed E, per via di semplici addizioni o sottrazioni, si avranno i coseni , e quindi gli archi A', B' ed E', dei quali riescono corde le distanze aZ, bZ, eZ, le quali esse stesse si conosceranno duplicando il seno della metà degli archi A', B' ed E'.

209. Reciprocamente, se sia la distanza aZ eguale ad una corda d'un arco noto A', e si cerchi di che arco diventerà corda la Zz, ossia di quanti gradi riuscirà l' arco BZ, che ne è la metà, ed è$=A$; dall'equazione (§ 199) $a^2 = 3 - 2\operatorname{sen}A . \sqrt{2}$, si ricaverà $\operatorname{sen}A = \frac{3-a^2}{2\sqrt{2}}$, e sostituendo il valore di $a^2 = 4\operatorname{sen}^2 {}^1/_2 A' = = 2 - 2\cos A'$ (§ 156) , avremo $\operatorname{sen}A = {}^1/_2 . \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos A' . \sqrt{{}^1/_2} = = \operatorname{sen}30^\circ\operatorname{sen}45^\circ + \cos A'\operatorname{sen}45^\circ$, e quindi (§§ 157 , 159) essendo $\operatorname{sen}(45^\circ + A') = \cos(45^\circ - A')$

(4) $$\operatorname{sen}A = {}^1/_2[\operatorname{sen}45^\circ + \operatorname{sen}(45^\circ - A') + \cos(45^\circ - A')].$$

210. Istessamente se sia noto l'arco B' , di cui è corda la distanza bZ, e si cerchi l'arco $B = BZ$ per via della Zz, che è corda di $2B$; moltiplicando l'equazione (B) (§ 197) per $\sqrt{5}+1$, per essere $(bB)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ed $Ab = {}^1/_2(\sqrt{5} - 1)$, avremo $(bZ)^2 . (\sqrt{5} + 1) = 2\sqrt{5} + 4\operatorname{sen}B$, e sostituendo il valore di $(bZ)^2 = = 4\operatorname{sen}^2 {}^1/_2 B' = 2 - 2\cos B'$ (§ 156), si avrà dopo fatte le riduzioni $\operatorname{sen}B = {}^1/_2 - 2\cos B' . \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$. Ora essendo Bb il lato del pentagono$= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ corda di 72°, sarà ${}^1/_2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \operatorname{sen}36^\circ$. Quindi ${}^1/_4 . \frac{5-\sqrt{5}}{2} = \operatorname{sen}^2 36^\circ$; quindi $1 - \operatorname{sen}^2 36^\circ = \cos^2 36^\circ = \operatorname{sen}^2 54^\circ =$

$= \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$; quindi risulterà $\text{sen}B = {}^1/_2 - 2\cos B'\,\text{sen}54^\circ$,
e finalmente (§ 157)

(5) $\qquad \text{sen}B = \text{sen}30^\circ - \text{sen}(54^\circ + B') - \text{sen}(54^\circ - B')$.

211. Nella stessa maniera se sia noto l'arco E', di cui è corda la distanza eZ, e si cerchi il grado dell'arco $BZ = E$, eguale alla metà dell'arco, di cui è corda $Zz = 2\text{sen}E$, sostituendo nell'equazione (E) (§ 197) il valore di $(eZ)^2 = 2 - 2\cos E'$, e gli altri valori di $(eB)^2 = 3 - \sqrt{2}$; $Ae = \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2\text{sen}22^\circ\ 30'$ (§§ 199, 38), avremo $2\text{sen}E.\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2\cos E' + 1 - \sqrt{2}$, e moltiplicando per $\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, ne verrà $4\text{sen}E = 2\cos E'.\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$ $- (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2\cos E'.\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} - (2 - \sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ $= 2\cos E'.\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ e dividendo per 4, e considerando, che è $\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2\text{sen}67^\circ\ 30'$ (§ 37), $\sqrt{2} = 2\text{sen}45^\circ$, si avrà (§§ 157, 158, 159) $\text{sen}E = 2\cos E'\text{sen}67^\circ 30'\text{sen}45^\circ - \text{sen}22^\circ\ 30'\ \text{sen}45^\circ$; ossia $\text{sen}E =$
$\cos E'\ [\cos(67^\circ\ 30' - 45^\circ) - \cos(67^\circ\ 30' + 45^\circ)] - \text{sen}22^\circ\ 30'\ .\ \text{sen}45^\circ$,
ossia $\text{sen}E = \cos E'\ \cos 22^\circ\ 30' + \cos E'\ \text{sen}22^\circ\ 30' - \text{sen}22^\circ\ 30'\ \text{sen}45^\circ$
ossia finalmente

$$(6) \qquad \text{sen}E = {}^1/_2 \left\{ \begin{array}{l} \cos(E' + 22^\circ\ 30') \\ + \text{sen}(E' + 22^\circ\ 30') \\ + \text{sen}\ \ 22^\circ\ 30' \\ + \cos(E' - 22^\circ\ 30') \\ - \text{sen}(E' - 22^\circ\ 30') \\ - \cos\ \ 22^\circ\ 30' \end{array} \right\}$$

212. Così dalle tre equazioni (A), (B) ed (E) ne abbiamo ricavate sei, per mezzo delle quali da archi dati possiamo ricavare nuovi archi coll'ajuto dei soli tre punti a, b ed e e insieme le nuove loro corde.

213. Potendo essere infiniti gli archi dati, sono ancora infiniti i casi di ciascuna di queste equazioni. Ma se non ci vogliamo prevalere che degli archi, che si possono trovare per mezzo degli stessi tre punti a, b ed e, essi sarebbero 120 per ogni equazione, quando per alcuna di esse non vi fossero al-

cuni limiti particolari. Difatti potendosi per via di quei tre punti la circonferenza in 240 parti eguali (§ 57), e per conseguenza la semicirconferenza in 120, saranno 60 i punti Z e 60 i z, che presi insieme determinerebbero 120 casi per ogni equazione. Ma alcuna di esse avrà dei limiti particolari.

214. Per esempio s' io volessi prendere sul compasso la corda 3°, cioè della centoventesima parte della circonferenza (§ 42), e collocando la punta del compasso in a segnare un arco, esso non potrebbe tagliare la circonferenza in alcun punto Z, essendo questa corda minore della distanza $aF = \sqrt{2}-1$. Non si potrà dunque nell'equazione (4) introdurre in luogo A' l'arco di 3°, e se ciò si volesse fare, ne verrebbe un valore maggiore dell'unità, cioè assurdo per sen$A$. Per vedere, quale sia il primo arco, che si potrà introdurre in luogo di A' tra gli archi della serie 1° 30', 3°, 4° 30', ecc., si osservi di che arco sia corda la distanza aF, che è la minima del punto a dal cerchio, ed è $=\sqrt{2}-1=2\text{sen}45^\circ-{}^1/_2=0{,}9142I356=\cos 23^\circ\ 54'+$. Dunque il primo arco, che si possa adoperare di quelli, che si trovano per via dei tre punti a, b ed e, sarà l' arco di 24°. Dietro ad esso poi si potranno adoperare tutti gli altri in serie 25° 30, 27°, 29° 30', ecc. sino al 180°; poichè le corde di tutti questi possono essere distanze dal punto a da qualche punto Z, ovvero z della circonferenza.

215. Più limitate sono le equazioni (5) e (6). Poichè nella (5) non si possono impiegare archi B', che abbiano la corda minore di bf, nè maggiore di bF; egualmente nella (6) sono esclusi tutti gli archi E' di corda minore di eF e maggiore di ef.

216. Vedremo in seguito i casi, nei quali riescano utili alcuni di questi valori per la divisione del cerchio, o per qualche altro Problema, che non si possa sciogliere se non per approssimazione, scegliendo quelli da tutta la lista calcolata, che dànno maggior avvicinamento al vero valore che si cerca, e nello stesso tempo si sciolgono con sezioni di archi meno lontane dall'angolo retto.

217. Intanto per ottenere tutti i vantaggi possibili dai tre punti a, b ed e senza introdurre punti nuovi, ricaveremo dalle

tre equazioni (A), (B) ed (E) altre sei equazioni per avere nuovi valori di archi e di corde.

218. Se sia l'arco BZ un arco conosciuto, per esempio uno di quelli, che si ottengono coi Problemi del Secondo Libro, e si chiami B; e si prenda la distanza bZ sul compasso, e si porti da a a qualche altro punto Z', che determini un altro arco $BZ'=A$, si può ricavare dal confronto delle due equazioni (A) e (B) una nuova equazione, che lo faccia conoscere. Poichè se in quelle due equazioni si farà $bZ=aZ'$; facendo nella (A) $Zz=2\text{sen}A$, e nella (B) $Zz=2\text{sen}B$, si avrà $(aB)^2-2\text{sen}A\,.\,Aa$ $=(bB)^2+2\text{sen}B\,.\,Ab$, ossia $3-2\text{sen}A\,.\sqrt{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}+\text{sen}B(\sqrt{5}-1)$ (§ 199), e liberando sen$A$, avremo $\text{sen}A=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,.\sqrt{{}^1/_2}-2\text{sen}B\,.\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,.\sqrt{{}^1/_2}=\text{sen}54^\circ\text{sen}45^\circ-2\text{sen}B\,.\,\text{sen}18^\circ\,.\,\text{sen}45^\circ$ (§ 210) $={}^1/_2(\cos9^\circ+\text{sen}9^\circ)-\text{sen}B\,.\,(\cos27^\circ-\text{sen}27^\circ)$ (§ 159); quindi (§ 156 e segg.)

$$(7)\qquad \text{sen}A={}^1/_2\left\{\begin{array}{c}\cos9^\circ+\text{sen}9^\circ\\ +\cos(B-27^\circ)\\ -\text{sen}(B-27^\circ)\\ -\cos(B-63^\circ)\\ +\text{sen}(B-63^\circ)\end{array}\right\}$$

219. Anche qui per B non si potranno prendere tutti gli archi, ma solamente quelli, che diano una distanza bZ, ovvero bz non minore di aF.

220. Ora se sia conosciuto un arco BZ, che si chiami A, e presa sul compasso la distanza aZ si porti essa da b a qualche punto Z' della stessa circonferenza, che determini l'arco BZ' $=B$; si conoscerà quest'arco B, e la sua corda, se occorra, se nell'equazione $\text{sen}A=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,.\sqrt{{}^1/_2}-2\text{sen}B\,.\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,.\sqrt{{}^1/_2}$ (§ 218) si libererà sen$B$. Si moltiplichi essa equazione pel fattore $2(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}$, ed avremo $2\text{sen}A.(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}=3+\sqrt{5}-4\text{sen}B$; onde avremo $\text{sen}B=\frac{3+\sqrt{5}}{4}-4\text{sen}A\,.\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,.\sqrt{{}^1/_2}=2\text{sen}^2 54^\circ-4\text{sen}A\,\text{sen}54^\circ\,.\,\text{sen}45^\circ$ (§ 210), e adoperate come sopra le equa-

zioni de' §§ 156 e seguenti, risulterà in fine

$$(8)\ \mathrm{sen}B = 1 + \mathrm{sen}18^\circ - \mathrm{sen}(A+9^\circ) + \cos(A+9^\circ) - \mathrm{sen}(A-9^\circ) - \cos(A-9^\circ).$$

221. In questa equazione (8) non si potranno impiegare per A quegli archi BZ, che dànno una distanza aZ maggiore di bF.

222. Ora se nell'equazione (A) (§ 197) si faccia $Zz = 2\mathrm{sen}A$, e nell' equazione (E) un' altra $Zz = 2\mathrm{sen}E$; facendo inoltre in queste due equazioni $(aZ)^2 = (eZ)^2$, si avrà dopo le sostituzioni dei valori (§ 199) $3 - 2\mathrm{sen}A . \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} - 2\mathrm{sen}E . \sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\mathrm{sen}A = {}^1/_2 + 2\mathrm{sen}E . \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} . \sqrt{{}^1/_2} = {}^1/_2 + 2\mathrm{sen}E\ \mathrm{sen}22^\circ\ 30'\ \mathrm{sen}45^\circ = {}^1/_2 + \mathrm{sen}E \cos 22^\circ\ 30' - \mathrm{sen}E\ \mathrm{sen}22^\circ\ 30'$ (§ 159). Quindi finalmente (§§ 157 e 158).

$$(9)\qquad \mathrm{sen}A = {}^1/_2 \left\{ \begin{array}{l} +\mathrm{sen}(E+22^\circ\ 30') \\ +\cos(E+22^\circ\ 30') \\ +\mathrm{sen}(E-22^\circ\ 30') \\ -\cos(E-22^\circ\ 30') \end{array} \right\}$$

223. Quest'equazione nona si può anche preparare in altro modo, perchè il calcolo riesca più facile per mezzo de' seni, e coseni artificiali, i quali si sogliono trovare nelle tavole più facilmente di dieci in dieci secondi. Perchè essendo (§ 222)

$$\mathrm{sen}A = {}^1/_2 + 2\mathrm{sen}E . \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} . \sqrt{{}^1/_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \mathrm{sen}E\right) \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \mathrm{sen}E\right) \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} : \sqrt{{}^1/_2} = (\mathrm{sen}67^\circ\ 30 + \mathrm{sen}E) \frac{\mathrm{sen}22^\circ\ 30'}{\mathrm{sen}45^\circ}$$

(§ 37). E facendo $67^\circ\ 30' - p$; $E = q$; si avrà

$$[9]\qquad \mathrm{sen}A = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{67^\circ\ 30' + E}{2}\ \cos\frac{67^\circ\ 30' - E}{2}}{\cos 22^\circ\ 30'}$$

La quale equazione sarà facile da calcolare per via de' logaritmi dei seni e de' coseni.

224. Se dunque prenderemo sul compasso una distanza del punto e da qualche punto Z estremo di un arco conosciuto $BZ = E$, e la porteremo da a a qualche altro punto Z' della circonferenza; conosceremo il nuovo arco $BZ' = A$ per via dell'equazione (9), ovvero della [9]. Queste avranno i loro limiti,

poichè l' arco BZ dovrà essere tale, che non si abbia eZ minore di aF.

225. Avendosi dal § 222, $2\text{sen}A.\sqrt{2}=\sqrt{2}+2\text{sen}E.\sqrt{2-\sqrt{2}}$: e si moltiplichi questa equazione per $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, avremo

$2\text{sen}A.\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}+2\text{sen}E$, e quindi $\text{sen}E=2\text{sen}A.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=2\text{sen}A.\text{sen}67^\circ 30'-\text{sen}67^\circ 30'$ (§ 37); quindi (§ 159

(10) $\quad \text{sen}E=\cos(A-67^\circ 30')-\cos(A+67^\circ 30')-\text{sen}67^\circ 30.$

226. Anche questa equazione decima si può preparare diversamente ad uso de' logaritmi. Poichè essendo $\text{sen}E=$ $=(\text{sen}A-{}^1/_2)2\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=[\text{sen}A+\text{sen}(-30^\circ)]2\text{sen}67^\circ 30'$, facendo $A=p; -30^\circ=q$ si avrà (§ 157)

[10] $\quad \text{sen}E=4\text{sen}\,\frac{A-30^\circ}{2}\cos\frac{A+30^\circ}{2}\,\text{sen}67^\circ 30'.$

227. È chiaro, che tutti i valori dell'arco BZ, ovvero $BZ=\pm A$, che daranno aZ maggiore di ef, non si potranno introdurre nell'equazione decima, che quindi riceverà i suoi limiti.

228. Finalmente due altre equazioni si possono ottenere dal confronto dell'equazione (B) colla (E). Poichè se si piglia una distanza da e a qualche punto Z della circonferenza, che sia l'estremo d'un arco conosciuto $BZ=E$, e con questa distanza eZ presa per raggio, e fatto centro in b si segni un arco, che tagli la circonferenza in qualche altro punto Z', che determini l'arco $BZ'=B$; si conoscerà quest'arco per via del suo seno nel modo seguente. Fatto nell'equazione (B) (§ 197), $Zz=2\text{sen}B$ e nell'equazione (E), $Zz=2\text{sen}E$, e fatto in esse $bZ=eZ$, si avrà dopo la sostituzione dei valori (§ 199) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}+\text{sen}B.(\sqrt{5}-1)$ $=3-\sqrt{2}-2\text{sen}E.\sqrt{2-\sqrt{2}}$; donde si ricava $2\text{sen}B.(\sqrt{5}-1)$ $=\sqrt{5}+1-2\sqrt{2}-4\text{sen}E.\sqrt{2-\sqrt{2}}$; e moltiplicando da tutte due le parti per $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$, avremo

$$\mathrm{sen}B=\frac{3+\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}.\sqrt{1/_2}-4\mathrm{sen}E.\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$=2\mathrm{sen}^2 54^\circ-2\mathrm{sen}54^\circ\ \mathrm{sen}45^\circ-4\mathrm{sen}E.\mathrm{sen}22^\circ 30'\ \mathrm{sen}54^\circ$. (§ 210);
e quindi (§ 159)
$\mathrm{sen}B=1-\cos108^\circ-\cos9^\circ-\mathrm{sen}9^\circ-2\mathrm{sen}E(\cos31^\circ 30'-\cos76^\circ 30')$,
e quindi (§ 157)

$$\begin{aligned}(11)\qquad \mathrm{sen}B=1+\mathrm{sen}18^\circ-\cos9^\circ-\mathrm{sen}9^\circ-\mathrm{sen}(E+31^\circ 30')\\ -\mathrm{sen}(E-31^\circ 30')+\mathrm{sen}(E+76^\circ 30')+\mathrm{sen}(E-76^\circ 30').\end{aligned}$$

229. Anche quest' equazione (11) avrà limiti da due capi. Poichè la distanza minima $eF=1-\sqrt{2-\sqrt{2}}$ è minore della di stanza $bf=1-{}^1/_2(\sqrt{5}-1)$, e la massima ef è maggiore della bF.

230. Se l'equazione

$$2\mathrm{sen}B.(\sqrt{5}-1)=\sqrt{5}+1-2\sqrt{2}-4\mathrm{sen}E.\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

trovata qui sopra § 228 si moltiplichi per $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}$, si avrà

$$\mathrm{sen}E=2\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\sqrt{1/_2}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$-4\mathrm{sen}B.\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\sqrt{1/_2}=2\mathrm{sen}54^\circ\ \mathrm{sen}67^\circ 30'\ \mathrm{sen}45^\circ$$

$-\mathrm{sen}67^\circ 30'-4\mathrm{sen}B.\mathrm{sen}18^\circ\ \mathrm{sen}67^\circ 30'\ \mathrm{sen}45^\circ$
$=\mathrm{sen}67^\circ 30'(\cos9^\circ+\mathrm{sen}9^\circ)-\mathrm{sen}67^\circ 30'-2\mathrm{sen}B\ \mathrm{sen}67^\circ 30'(\cos27^\circ$
$-\mathrm{sen}27^\circ)={}^1/_2(\mathrm{sen}76^\circ 30'-\cos76^\circ 30'+\mathrm{sen}58^\circ 30'+\cos58^\circ 30')$
$-\mathrm{sen}67^\circ 30'-\mathrm{sen}B.(\mathrm{sen}85^\circ 30'+\mathrm{sen}40^\circ 30'-\cos40^\circ 30'-\cos85^\circ 30')$;
donde si ha finalmente

$$(12)\qquad \mathrm{sen}E={}^1/_2\left(\begin{array}{c}\mathrm{sen}76^\circ 30'-\cos76^\circ 30'\\+\mathrm{sen}58^\circ 30'+\cos58^\circ 30'\end{array}\right)-\mathrm{sen}67^\circ 30'$$

$$-{}^1/_2\left\{\begin{array}{c}\cos(85^\circ 30'-B)+\mathrm{sen}(85^\circ 30'-B)\\-\cos(85^\circ 30'+B)-\mathrm{sen}(85^\circ 30'+B)\\+\cos(40^\circ 30'-B)+\mathrm{sen}(40^\circ 30'-B)\\-\cos(40^\circ 30'+B)-\mathrm{sen}(40^\circ 30'+B)\end{array}\right\}$$

La quale equazione non ha limiti.

231. Se per accidente qualcuno dei valori, che si trovano con queste dodici equazioni, si trovi a prima giunta prossimo

a qualche valore utile e cercato nella soluzione de' Problemi: avremo il vantaggio di arrivare all'intento per una via semplicissima. Poichè non si avranno ad impiegare altri punti presi fuori della circonferenza, che i soli tre già rimarcati tante volte *a*, *b* ed *e*, e nella circonferenza qualcuno di quelli, che servono alla divisione esatta della circonferenza per via delle soluzioni dei Problemi del lib. II. Passiamo dunque oramai a darne varj esempj.

232. E prima vedremo come si possa dividere il cerchio alla maniera antica in gradi e minuti, senza l'errore di secondi. Per far questo (fig. 12) supporremo, che la circonferenza del cerchio *BDd* sia divisa in dugento quaranta parti (§§ 57, 58), ciascuna delle quali come la *P*δ contiene 1° 30′, e che la numerazione positiva cominci da *B* verso *F*, e una simile numerazione negativa vada da *B* verso *f*, e sieno i punti *Z* e *Z′* punti vaghi, che non hanno per ora altra condizione, se non che si trovino tra *B* ed *F* sulla circonferenza; e istessamente i punti *z* e *z′* tra *B* ed *f*. Questo lo facciamo a scanso delle troppe figure, che bisognerebbero se se ne replicasse una ad ogni Problema. Inoltre la minutezza delle divisioni appena le lascerebbe scorgere anche in figure molto maggiori della fig. 12.

233. *Prob.* Trovare l' arco d' un grado antico, ossia di 1°, senza l'errore di mezzo secondo (fig. 12).

Sol. I. Sia l'arco $Bz = -55^0\ 30'$ (§ 232). Si prenda sul compasso la distanza *bz*, e fatto centro in *e* si segni un arco, che tagli la circonferenza in un punto *Z*. Sarà l'arco $BZ = 52^0\ 59'\ \frac{1739}{1751}$, cioè di 53°, senza che vi manchino venticinque minuti terzi. Si ha poi nelle divisioni da *B* verso *F* eseguite col Problema § 42 l'arco di $54^0 = \frac{18}{120}$. Si avrà dunque anche l'arco $54^0 - 53^0 = 1^0$ colla approssimazione, che si voleva.

Dim. Se nell'equazione (12) si faccia $B = -55^0\ 30'$, risulta in fine del calcolo $\text{sen}E = 0{,}7986343 = \text{sen}\ 52^0\ 59'\ \frac{1739}{1751}$.

Sol. II. Sia l' arco $BZ = 10^0\ 30'$. Colla distanza *b Z* presa per raggio, e col centro *a* si descriva un arco, che tagli la circonferenza in un altro punto *Z′*. Sarà l' arco $BZ' = 29^0\ 29'$

$\frac{2511}{2532}$ cioè $=29^0\ 30'$ senza l' errore di mezzo secondo. Si trova poi nelle divisioni del § 58 l'arco di $28^0\ 30' = \frac{19}{240}$ della circonferenza. Dunque si avrà la differenza de' due archi eguale a 1^0 coll'approssimazione voluta.

Dim. Se nell'equazione (7) si ponga $B = 10^0\ 30'$, risulterà in fine del calcolo $\text{sen}A = 0{,}4924215 = \text{sen}29^0\ 29'\ \frac{2511}{2532}$. Mancherà dunque la differenza degli archi dal valore di un grado di $29'''$.

234. Questa seconda Soluzione è meno prossima della prima di 5 minuti terzi, ma le sezioni degli archi si fanno in questa ad un angolo più vicino al retto.

235. Avendosi l' arco di $1^0\ 30'$ (§ 226), ed essendosi trovato l'arco di 1^0 (§ 227), si avrà per sottrazione anche l' arco di $30'$, ossia il mezzo grado, e quindi si avrà modo di dividere tutta la circonferenza in mezzi gradi senza accumulare errori, e senza che alcun punto sia lontano dal suo vero sito di mezzo secondo.

236. *Prob.* Trovare l'arco di un quarto di grado, ossia di $15'$, senza l'errore di un minuto terzo.

Sol. Sia l'arco $Bz = -12^0$, la distanza ez sarà eguale alla corda di $87^0\ 15'$. Se dunque si piglierà sul compasso, e fatto centro in B si taglierà l'arco BF in un punto Z', sarà l' arco $BZ' = 87^0\ 15'$. Si ha poi dalle divisioni del § 42 l'arco di $87^0 = {}^{29}/_{120}$ della circonferenza. Si avrà dunque la differenza de' due archi $= 15'$

Dim. Se nell'equazione (3) (§ 207) $\cos E' = \text{sen}\ 45^0 - \text{sen}30^0 + \cos(E - 22^0\ 30') - \cos(E + 22^0\ 30')$
si ponga $E = -12^0$, si avrà

$$\begin{aligned} \text{sen}45^0 - \text{sen}30^0 &= 0,\ 2071068 \\ \cos(-34^0\ 30') &= 0,\ 8241262 \\ -\cos 10^0\ 30' &= -1{+}0167451 \\ \hline \cos E' &= 0,\ 0479781 \end{aligned}$$

Ora nelle tavole, che dànno i seni naturali con sette cifre, si trova $0,0479781 = \cos 87^0\ 15'$ senza alcuna varietà nemmeno nell'ultima cifra. Impiegando poi più decimali si trova

$$\cos E' = 0{,}0479780622;\ \cos 87^0\ 15' = 0{,}047978128520.$$

Impiegando sole otto cifre decimali si ha

$$\cos 87^\circ\, 15'\, 1'' = 0{,}04797229.$$

Si ha dunque per 1″ la differenza 584. Se 584 dà di differenza 60‴, 7 darà $^{105}/_{146}$ di minuto terzo. Sarà dunque l' arco E', del quale è corda la eZ', di 87° 15 con una mancanza minore di un minuto terzo.

237. Si potrà per mezzo di questo Problema dividere la circonferenza in 1440 parti, cioè in tanti quarti di grado, senzachè vi sia in alcun punto di divisione l'errore di tre minuti terzi. Poichè fatte sopra ogni arco $P\delta$ di 1° 30′ tre divisioni di 15′ in 15′ da P verso δ e due da δ verso P, resterà l'arco $P\delta$ diviso in sei parti, ciascuna delle quali sarà di un quarto di grado senza l'errore indicato nella posizione di alcun punto di divisione. Così nel resto della circonferenza. Quindi innanzi supporremo la circonferenza divisa in gradi e quarti, che per semplicità del calcolo supporremo esatti. Si potrà tener conto dei loro errori, qualor si voglia.

238. *Prob.* Trovare un arco di 10′, ossia la sesta parte di un grado senza l'errore di 10‴, ossia della sesta parte d' un secondo.

Sol. Sia l'arco $Bz = -49^\circ\, 30'$; sarà la distanza bz eguale alla corda dell'arco 38° 50′, senza l'errore indicato. Sottraendo poi l'arco 38° 50′ dall'arco 39° = $^{13}/_{120}$ della circonferenza, che si ha col § 42, rimarrà l'arco di 10′.

Dim. Se nell'equazione (2) si porrà $B = -49^\circ\, 30'$, ne verrà $\cos B' = 0{,}7789738 = \cos 38^\circ\, 49' \frac{1819}{1824}$. Si ha dunque $B' = 38^\circ\, 50'$ col difetto di 9‴.

239. Sottraendo da un arco di 50′ mancante di 9‴ un arco di 45′ (§ 237) mancante di qualche minuto terzo, si avrà l'arco di 5′, ossia la dodicesima parte del grado senza l'errore di 9‴.

240. *Prob.* Trovare l'arco di 6′, ossia un decimo di grado senza l'errore di 13‴.

Sol. Sia l'arco $BZ = 45^\circ$, cioè sia l'arco BG. Si prenda sul compasso la distanza BG, e fatto centro in b si tagli la circonferenza in z. Sarà l'arco $Bz = -40^\circ\, 6'$, senza l' errore indicato. Sottraendo l'arco di -40° (§ 237), resterà l'arco di 6′.

Dim. Se nell' equazione (5) si ponga $B' = 45^\circ$; ne verrà

sen$B$=—0,6441228=sen$\left(-40^\circ\ 5'\ \frac{2217}{2225}\right)$. Sarà dunque l'arco B= Bz=—40° 6' col difetto di 12‴.

241. Sottraendo dall'arco di 6' (§ 240) l'arco di 5' (§ 239), rimarrà l' arco di 1' coll' errore di pochi minuti terzi. Ma si può trovare quest'arco immediatamente col seguente

242. *Prob.* Trovare immediatamente l'arco di 1' senza l'errore di 22 minuti terzi.

Sol. Sia l'arco Bz = — 27°. Si prenda sul compasso la distanza bz coma raggio, e fatto centro in e si tagli la circonferenza in Z. Sarà l'arco BZ=29° 59' coll'eccesso di 10 minuti terzi. Essendo dunque l'arco BN=30° (§ 31) sarà l'arco ZN= 1' mancante di 10‴.

Dim. Se nell'equazione (12) si ponga B = — 27°, si avrà sen$E$=0,4997496=sen 29° 59' $\frac{15}{2519}$. Dunque ecc.

243. *Prob.* Trovare l'arco di 9' senza l'errore di 7 minuti terzi.

Sol. Colla distanza bK presa per raggio, e col centro e si segni un arco, che tagli la circonferenza in z. Sarà l'arco Bz= —4° 21' coll'eccesso di 6 minuti terzi che sottratto da —4° 30' lascia 9' senza l'errore indicato.

Dim. Se nell'equazione (12) si faccia B=15°=BK(§ 32), si avrà sen$E$=—0,0758494=sen$\left(-4^\circ\ 21'\ \frac{5}{2901}\right)$. Sarà dunque l'arco Bz =—4° 21' 0'' 6‴.

Questo Problema servirà ancora alla nuova divisione del cerchio, come vedremo (§ 257).

244. L' arco di 15' mancante meno di un minuto terzo (§ 236), quello di 10' crescente meno di 10‴ (§ 238), quello di 6' mancante meno di 13‴ (§ 240), quello di 1' mancante meno di 22‴ (§ 242), quello di 9' mancante meno di 7‴ (§ 243) si potranno combinare in modo per addizione o sottrazione senza accumulare molto gli errori, che in fine risulti tutta la circonferenza divisa in gradi e minuti primi senza l' errore che di pochissimi minuti terzi. Poichè raddoppiando per esempio l'arco di 9', avremo un arco di 18' mancante meno di 14‴, dal quale sottraendo l' arco di 6' mancante meno di 13‴ avremo l'arco di 12' mancante di circa un minuto terzo.

Sottraendo ora quest'arco dall' arco di 15′ mancante meno di 1‴ (§ 236), avremo l'arco di 3′ coll'errore di un minuto terzo appena. Con questo si potrà dividere in cinque parti ogni arco di 15′, e resterà divisa tutta la circonferenza di tre in tre minuti primi coll'errore minore di sei minuti terzi per conto di quest' ultima divisione, il quale errore , se si porrà sul verso contrario all'errore di tre minuti terzi al più, che si commette sulla divisione di 15′ in 15′ (§ 236) , diverrà anche minore. Quindi impiegando l' arco di 1′ mancante meno di 4‴ (§ 241) a dividere ogni arco di 3′, non si verrà mai a commettere un errore di 10‴, e si avrà divisa tutta la circonferenza in gradi, e minuti primi.

Si potrebbero anche combinare questi, o altri archi cavati dalle dodici equazioni superiori, in guisa che si venisse a commettere minore errore, e noi impiegheremmo in questo alquanti Problemi, se per una parte questa divisione del cerchio in 360° non dovesse antiquarsi , e se per l' altra credessimo , che gli artefici , che ancora la volessero usare , trovassero opportune per la pratica tali ricerche. Non vogliamo però ommettere i seguenti Problemi, supponendo adesso, che si sia diviso il cerchio intero in gradi antichi e minuti , che per semplicità supporremo esatti.

245. *Prob.* Trovare l'arco di 20″, ossia un terzo di minuto, crescente di 1‴ appena.

Sol. I. Pel § 202 si trova l'arco di 40″ crescente meno di un minuto terzo. Quindi anche l' arco di 20″ complemento al 1′ mancante meno di un minuto terzo.

Sol. II. Presa sul compasso la corda dell'arco 61° 30′ come raggio , e fatto centro in e si descriva un arco , che tagli la circonferenza in Z. Sarà l'arco $BZ=20^\circ\, 39'\, 40''$ crescente di un minuto terzo appena. Quindi sottraendo quest' arco dall' arco 20° 40′, si avrà l'arco di 20″ mancante appena di 1‴.

Dim. Se nell'equazione (6) si ponga $E'=61^\circ\, 30'$, adoperando tavole più copiose di seni, si avrà

$$\text{sen}BZ=\text{sen}\ E=0{,}35283991;\ \text{si ha poi}$$

$$\text{sen}20^\circ\, 39'\, 40'' = 0{,}35283984$$

$$\text{Ora}\ \log 0{,}3528399 = 9,\ 5475777$$

$$\log\ \text{sen}20^\circ\, 39'\, 40'' = 9,\ 5475776$$

$$\log \operatorname{sen} 20^\circ\, 39'\, 50'' = 9,\ 5476334$$
$$\text{differenza} = \quad 558$$

Dunque E crescerà sopra l'arco $20^\circ\, 39'\, 40''$ di $\frac{10''}{558}$ circa, cioè di $1'''$ e poco più.

246. *Prob.* Trovare l'arco di $15''$, ossia un quarto di minuto, mancante di $10'''$ circa.

Sol. Si prenda per raggio sul compasso la corda di $31^\circ\, 30'$, e fatto centro in e si tagli la circonferenza in punto Z. Sarà l'arco $BZ = 57^\circ\, 30'\, 15''$ mancante di $9'''$.

Dim. Se nell'equazione (6) s'introduca $E' = 31^\circ\, 30'$, si tro- $E = 57^\circ 30'\, \frac{386}{1563}$. Ma si ha $\frac{392'}{1568} = {}^1/_4$. Dunque la mancanza è di $\frac{4}{1563}$ circa, cioè di $10'''$ circa.

247. *Prob.* Trovare l'arco di $12''$, ossia un quinto di minuto, mancante di $1'''$ circa.

Sol. Sia l'arco $Bz = -10^\circ\, 30'$. Presa sul compasso per raggio la distanza bz, e fatto centro in a si tagli la circonferenza in Z. Sarà l'arco $BZ = 40^\circ\, 40'\, 12''$ colla mancanza di $1'''$ circa.

Dim. Se nell'equazione (7) si ponga $B = -10^\circ\, 30'$, risulterà dal calcolo $A = 40^\circ\, 40'\, \frac{440}{2206}$. Ora si ha $\frac{441}{2205} = {}^1/_5$. Si ha dunque la mancanza di $\frac{1}{2206}$ cioè di $1'''$ circa.

Se si calcolasse con tavole più copiose, si rileverebbe più precisamente l'errore.

248. *Prob.* Trovare l'arco di $10''$, ossia di un sesto di minuto primo, crescente di $1'''$ circa.

Sol. Sia l'arco $Bz = -24^\circ$. Presa sul compasso per raggio la distanza ez, e fatto centro in a si segni un arco, che tagli la circonferenza in Z. Sarà l'arco $BZ = 16^\circ\, 15'\, 10''$ coll'errore indicato.

Dim. Se nell'equazione (9) si ponga $E = -24^\circ$, ne verrà per risultato $\log \operatorname{sen} A = 9{,}4469652$. Questo si trova essere logaritmo del seno di $16^\circ\, 15'\, 10''\, \frac{20}{722}$. L'eccesso dunque non arriva a due minuti terzi.

249. *Prob.* Trovare l'arco di 5", ossia d'una duodecima di minuto primo, senza l'errore sensibile alle tavole comuni e minore di 2‴.

Sol. I. Sia l'arco $BZ=4°\ 30'$. Si prenda sul compasso per raggio la distanza eZ, e fatto centro in a si segni un arco, che tagli la circonferenza in un altro punto Z'. Sarà l' arco $BZ'=32°\ 51'\ 5''$ senza l'errore indicato.

Dim. Se nell'equazione (9) si ponga $E=4°\ 30'$, risulterà log sen$A$=9, 7343692; ora log sen32° 51'=9, 7343529; e la differenza è 163; la differenza poi nelle tavole per dieci minuti è 326 doppia in punto di 163. Dunque ecc.

Calcolato l' errore con tavole più copiose risulta minore di 2‴.

Sol. II. Sia l' arco $BZ=31°\ 30'$. Si prenda sul compasso per raggio la distanza eZ, e col centro a si tagli la circonferenza in un altro punto Z'. Sarà l'arco $BZ'=51°\ 30'\ 55''$ col difetto minore di un minuto terzo.

Dim. Se nell'equazione (9) si ponga $E=31°\ 30'$, risulterà per via delle tavole comuni log sen$A$=9, 8936365=log sen51° $30'\ 50''\ \frac{84}{167}$. Il qual rotto $\frac{84}{167}$ riferendosi a 10" darà 5" coll'eccesso minore di 1‴. Sarà dunque $A=51°\ 30'\ 55''$, il qual arco sottratto da 51° 31' lascerà 5" col difetto indicato.

Ma è tempo di passare a dimostrare qual uso si possa fare delle dodici equazioni poste sopra volendo dividere la circonferenza del cerchio alla nuova maniera de' Francesi.

250. Secondo questa maniera la circonferenza vien divisa in 400 gradi, acciocchè il quadrante, che è fondamento di tutta la trigonometria, resti diviso in 100 gradi. Ogni grado vien diviso in 100 minuti primi, ogni minuto primo in 100 secondi, e così via via. La natura delle decimali dispensa, se un vuole, dal nominar gradi, minuti, o secondi, intendendosi abbastanza la natura del rotto dal posto delle decimali.

251. Quindi ne viene, che nove gradi antichi vagliano 10 gradi moderni, ossia è 9°=0,10, che 54'=0,01; che 27'=0,005; che 5'24"=0,001; che 32" 24‴=0,0001; cioè che un grado moderno vale 54 minuti primi antichi, che un minuto moderno vale 32" 24‴ dell'antica divisione, ecc.

252. Le divisioni accurate ottenute per via dei tre punti *a*, *b* ed *e* nel Secondo Libro dànno fino ad una 240^ma^ della circonferenza (§ 59). L' arco, che la forma, è nella divisione antica di 1° 30′ in punto. Esso non si esprime egualmente con un numero finito di cifre decimali nella divisione moderna. Il primo arco che si formi coll'aggregare delle 240^me^, e che si esprima con un numero finito di decimali del quadrante, è l'arco di $^3/_{240}$, ossia di $^1/_{80}$ della circonferenza, il quale è di 4° 30' = 0,05 del quadrante, cioè di 5 gradi della nuova divisione. Si può dunque coi metodi del Secondo Libro, e per via dei soli tre punti *a*, *b* ed *e* presi fuori della circonferenza, dividerla in parti eguali di cinque gradi moderni ciascuna, e ciò con precisione geometrica, il che è già molto vantaggio di questa Geometria.

253. Si potrebbe, se si volesse, colla bissezione degli archi (§ 60) dividere in seguito la circonferenza in archi di due gradi e mezzo ciascuno, ossia di 0,025, quindi proseguire la bissezione, ma con essa non si potrà avere, come è chiaro, un grado precisamente. Non resta dunque mezzo alla Geometria per ottenere l' arco d' un grado (§ 63), e solo è da cercarsi qualche costruzione, che lo dia almeno prossimamente.

254. *Prob.* Trovare l'arco d'un nuovo grado, ossia di 0,01 senza l'eccesso d' un sesto di minuto secondo della nuova divisione, ossia di tre minuti terzi della vecchia.

Sol. Si pigli sul compasso la corda di 138° gradi della divisione vecchia, ossia di quarantasei centoventesime parti della circonferenza (§ 42), e fatto centro in *a* si segni un arco, che tagli il quadrante *Bf* in un punto *z*. Sarà l' arco *Bz* undici gradi della nuova divisione, dal quale sottraendo l' arco di 9° =0,10 (§ 252), resterà un arco=0,01 coll' eccesso piccolissimo indicato.

Dim. Se nell' equazione (4) si ponga $A' = 138°$, avremo $\text{sen}A = {}^1/_2[\text{sen}45° + \text{sen}183° + \text{sen}(-93°)] = {}^1/_2(\text{sen}45° - \text{sen}3° - \text{sen}87)$

Si ha poi

$$
\begin{array}{rl}
-\text{sen } 3° = & -0,0523360 \\
-\text{sen}87° = & -0,9986295 \\
\text{sen}45° = & 1-2928932 \\
\hline
 & -0,3438587
\end{array}
$$

$-0 , 1719293$

Si ha poi $\quad \text{sen}9^\circ 57'=0 , 1719291$

$\text{sen}9^\circ 58'=0 , 1722156$

Abbiamo dunque l'arco $Bz=A=9^\circ 57'$ col solo eccesso di $\frac{2}{2865}$ di un minuto primo della vecchia divisione, cioè senza l'eccesso di $4'''$, e quindi senza l'errore di un sesto di minuto secondo della nuova divisione.

255. Si potrebbe con tavole alquanto più ampie delle comuni indagare più precisamente un tale errore. In qualunque modo egli è così piccolo, che anche accumulandolo due o tre volte non riuscirebbe sensibile nemmeno nei maggiori quadranti. Ora non ci sarà di bisogno d'accumularlo più di due volte nella divisione di essi. Poichè si ha già con precisione geometrica l'arco di 0,05 (§ 252). Se in questo si segnano due divisioni di un grado cominciando dai due estremi, e venendo sul verso contrario, si avranno segnati su quest'arco quattro punti, che ne daranno la divisione in cinque gradi, e ciascuno di questi punti non sarà lontano dalla sua vera posizione di sei interi minuti terzi della divisione vecchia, ossia di un terzo di minuto secondo della nuova.

256. In vigore di questo Problema si supporrà ora divisa la circonferenza nei 400 gradi della nuova divisione.

257. *Prob.* Trovare l'arco di un nuovo mezzo grado senza l'eccesso di sette minuti terzi della divisione vecchia, ossia di un terzo di minuto secondo della nuova.

Sol. Si prenda sul compasso la distanza del punto b dal punto K, e con questo raggio bK fatto centro in e si segni un arco, che tagli la circonferenza in un punto z. Sarà l'arco Bz $=-4^\circ 21'$ coll' eccesso minore di $7'''$. Si sottragga da esso un arco di $3^\circ=Np$ (§ 43). Si avrà di residuo $1^\circ 21'$, cioè un grado e mezzo della nuova divisione, colla corda del quale presa per raggio, e facendo centro in tutti i punti dei gradi (§ 256) si potranno dividere per metà tutti gli stessi gradi.

Dim. Se nell'equazione (12) s'introduca $B=BK=15^\circ$ (§ 32): risulterà $E=-4^\circ 21' \frac{5}{2901}$. Dunque ecc. (§ 243).

258. *Prob.* Trovare l' arco di un quinto di grado nuovo senza l'eccesso di un minuto secondo vecchio.

Sol. Presa sul compasso la corda di 51°, e fatto centro in *e* si segni un arco, che tagli il quadrante in *Z*; sarà l'arco *BZ* di trentasette gradi nuovi coll'aggiunta di un quinto di grado col piccolo errore indicato.

Dim. Se nell'equazione (6) si faccia $E' = 51°$, si avrà $E =$ $= 33° \, 28' \frac{1968}{2426} = 33° \, 28' \, 48'' \frac{1632}{2426}$. Ma $33° \, 28' \, 48'' = 0{,}372$. Dunque ecc.

259. *Prob.* Trovare l'arco di quattro decime di un nuovo grado senza l'eccesso di 16‴ antichi.

Sol. Sia l'arco $BV = 76° \, 30'$, e si prenda un'apertura di compasso$= bZ$, colla quale fatto centro in *a* si segni un arco, che tagli il quadrante in un punto *Z'*. Sarà l'arco $BZ' = 0{,}094$, cioè a nove gradi nuovi, e quattro decime coll'eccesso indicato.

Dim. Se nell'equazione (7) s'introduca $B = 76° \, 30'$; ne verrà $A = 8° \, 27' \frac{1738}{2877}$. Ma $8° \, 27' \frac{1726}{2877} = 0{,}094$. Dunque ecc.

260. *Prob.* Dividere un grado della nuova divisione in dieci parti eguali.

Sol. Avendolo diviso per metà per via del § 257 , si sottraggono dall'arco di 0,005 gli archi di 0,004 (§ 259) e di 0,002 (§ 258), e si avranno gli archi di 0,001, e di 0,003 con l'errore di soli minuti terzi della vecchia divisione. Si avranno dunque tutti gli archi per la divisione dell'arco di 0,005 in cinque parti, e quindi dividendo similmente l' altra metà del grado, resterà diviso tutto in dieci parti eguali.

361. Si potranno fare sottrazioni e somme de' suddetti archi in modo, che contrapponendo gli eccessi ai difetti ne risulti una millesima quasi esatta. Si potrà quindi innanzi supporre diviso il quadrante in millesime, ossia di dieci in dieci nuovi minuti. Questi si supporranno esatti per semplicità del calcolo.

262. *Prob.* Trovare l'arco d'un nuovo minuto senza l'errore di un vecchio minuto terzo.

Sol. Sia un arco $Bz = -1° \, 30'$. La distanza *az* sarà corda

di un arco di 1,3609 senza l' errore indicato. Sottraendo quest'arco dall'arco di 1,361 (§ 260), si avrà l'arco di 0,0001.

Dim. Se nell' equazione (1) si ponga $A = -1^\circ\, 30'$, risulta $A' = 122^\circ\, 28' \frac{2111}{2454} = 122^\circ\, 28'\, 51''\, 36''' = 1{,}3609$ (§ 251). Dunque ecc.

263. *Prob.* Trovare l'arco di due nuovi minuti senza l' errore di un vecchio minuto terzo.

Sol. Sia l'arco $Bz = -48^\circ$. La distanza bz sarà corda di un arco di 0,4422 colla precisione indicata. Da quest'arco sottraendo l'arco di 0,442 (§ 260), resterà l'arco di 0,0002.

Dim. Se nell' equazione (2) si ponga $B = -48^\circ$, risulta $B' = 39^\circ\, 47' \frac{1639}{1862} = 39^\circ\, 47'\, 52''\, 48''' = 0{,}4422$ (§ 251). Dunque ecc.

264. *Prob.* Trovare l'arco di tre nuovi minuti senza l' errore di un nuovo minuto terzo.

Sol. Sia un arco $Bz = -78^\circ$. Colla distanza ez presa per raggio, e fatto centro in a si segni un arco, che tagli il quadrante Bf in un punto z'. Sarà l'arco $Bz' = -0{,}0187$ senza l'errore indicato. Se si sottrae quest'arco dall'arco $= -0{,}019$ (§ 260), resterà l'arco $= -0{,}0003$.

Dim. Se nell'equazione [9] si ponga $E = -78^\circ$, risulta negativo il seno di A. Se si cambiano i segni ai due membri dell'equazione, risulta log.sen$A = 8\,,4678991$. Ora nelle nuove Tavole del Callet per la nuova divisione del cerchio si trova 8 , 467 : 8990=log.sen0,0187. Da log.sen$A = 8\,,4678991$
si sottr. $DS = 6\,.\,1960574$ *(Vedi Callet)*
si avrà $\quad\overline{2\,.\,2718417} =$ log.187,0000.
Si ha dunque $A = -0{,}018700004$. L' errore si trova anche minore, se s'impiegano più cifre nei logaritmi.

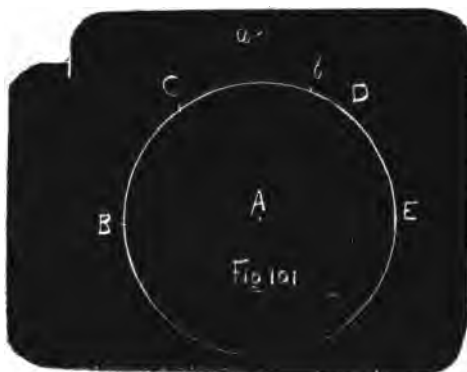
265. La somma approssimazione nella posizione del punto in questi tre Problemi antecedenti, e specialmente nell'ultimo, è tale, che non si può desiderare di più. Per via degli archi trovati con essi Problemi si può in più maniere dividere una millesima di quadrante (§ 260) in dieci parti eguali, cioè in minuti primi della nuova divisione del cerchio.

266. Nella stessa guisa si potrebbe passare a divisioni più minute. Ma bisognerebbe impiegare tavole più copiose di cifre di quelle, che io ho generalmente impiegate nel calcolare le

dodici equazioni soprammentovate. Ciò si potrebbe fare, qualora l'uso richiedesse, che si spinga la divisione d'una circonferènza oltre i minuti primi del nuovo sistema Francese.

267. *Prob.* In un cerchio (fig. 101) di dato raggio AB trovare una corda Bb eguale prossimamente ad un quarto della circonferenza.

Fig 101

Sol. Si faccia nella circonferenza ad $AB = BC = CD = DE$. Quindi a $BD = Ba = Ea$. Col centro C, e col raggio Ca si segni un arco, che tagli la circonferenza in b. Sarà la Bb la corda cercata.

Dim. Supposto $AB=1$, si ponga $BC=A=60°$ nell'equazione (1); risulterà $A' = 43° \, 33' \frac{286}{2005} = Cb$. Sarà dunque l'arco $BCb = 103° \, 33' \frac{286}{2005}$. La sua metà $51° \, 46' \frac{1145}{1005}$ ha per seno 0,7855998. Sarà dunque la corda $Bb=1{,}5711996$. Il quarto della circonferenza è poi$=1{,}5707963$. L'errore dunque è di 0,0004 circa.

268. Secondo la proporzione di Archimede posto il raggio $=1$; si trova il quarto della circonferenza$={}^{11}/_{7}=1{,}5714$. Dunque la costruzione di questo Problema (§ 267) dà un' approssimazione maggiore. Essendo questa costruzione semplicissima, sarà da usarsi in pratica a preferenza di altre, che potremmo aggiungere, che darebbero bensì una maggiore approssimazione teorica, ma sarebbero più complicate, e però più soggette ad errore.

269. *Prob.* In un cerchio (fig. 102) di dato raggio AB trovare l'arco eguale prossimamente allo stesso raggio.

Sol. Si faccia nella circonferenza $BLCMFDOEd$ ad $AB=BC$

$=CD=DE=Ed$. Quindi a $BD=Ba=Ea$. Quindi ad $Aa=BF=Db=db=aL$. Quindi ad $AB=FO$. Quindi finalmente a $bF=OM$. Sarà l'arco LM eguale prossimamente al raggio.

Dim. Se nell'equazione (4) s'introduce $A'=90°$, del quale arco è corda la aL; risulterà $BL=A=20°\ 42'\frac{786}{1721}$. Essendo poi $OM=bF$ corda della quinta parte della circonferenza (§ 40), cioè di 72°, ed essendo l'arco $FO = 60°$; sarà l'arco $FM=12°$. Quindi l'arco $LM = BF - BL - FM = 57°\ 17'\frac{1035}{2721}=57°\ 17'\ 43''+$. Si ha poi l'arco eguale al raggio, come è noto$=57°\ 17'\ 44''$. Dunque ecc.

270. *Prob.* Trovare (fig. 103) il lato di un quadrato, che prossimamente sia eguale in area ad un cerchio di raggio dato AB.

Sol. Si faccia nella circonferenza $BPCQDRE$ ad $AB=BC=CD=DE$, e collo stesso raggio BA, e coi centri B ed E si descrivano i due archi ALc, AMd. Coi centri C e D, e col raggio DB si descrivano gli archi cNM, dNL. Si faccia ad $AN=BP=PQ$; quindi ad $LM=QR$. Sarà BR il lato cercato.

Dim. Se nel triangolo isoscele CND si suppone la base $CD=1$ divisa per metà in μ; si avrà $(CN)^2=(C\mu)^2+(N\mu)^2$, cioè (§ 2) $3=\frac{1}{4}+(N\mu)^2$; quindi $N\mu=\frac{1}{2}\sqrt{11}$. Si ha poi $(CA)^2=(C\mu)^2+(A\mu)^2$, e quindi $A\mu=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sarà dunque $AN=\frac{1}{2}(\sqrt{11}-\sqrt{3})=0{,}7922869$, che si trova essere corda di un arco$=46°\ 40'\frac{1272}{2071}$

$=BP=PQ$. Sarà dunque l'arco $BQ=93^\circ\ 20'\frac{2544}{2671}$. Siano condotte le rette BL divisa per metà in n, BD, Dn, BE, e le $D\delta$, Ll, Mm perpendicolari alla stessa BE in δ, l ed m.

Essendo l'angolo $DBE=30^\circ$ (20, lib. III); sarà $\text{sen}DBE={}^1/_2$; $\cos DBE={}^1/_2\sqrt{3}$. Sarà poi per la Trigonometria $\cos DBn=\frac{Bn}{DB}$; $\text{sen}DBn=\frac{Dn}{BB}$; cioè $\cos DBn={}^1/_6\sqrt{3}$; e per essere $Dn=\sqrt{(DB)^2-(Bn)^2}={}^1/_2\sqrt{11}$, $\text{sen}DBn={}^1/_6\sqrt{33}$. Si ha poi (§ 154) $\cos LBl=\cos(DBn-DBE)=\cos DBn \,.\, \cos DBE+\text{sen}DBn \,.\, \text{sen}DBE={}^1/_6\sqrt{3}\times{}^1/_2\sqrt{3}+{}^1/_6\sqrt{33}\times{}^1/_2={}^1/_{12}(3+\sqrt{33})=\frac{Bl}{BL}=Bl$ (per essere $BL=BA=1$). Dunque $Al=AB-Bl={}^1/_{12}(9-\sqrt{33})$, e quindi $lm=LM=2Al={}^1/_6(9-\sqrt{33})=0{,}5425729$, che si trova essere corda dell'arco$=31^\circ\ 28'\frac{2518}{2799}=QR$. Sarà dunque l'arco $BQR=$ $=124^\circ\ 49'\frac{6370}{7476}$. La sua metà $62^\circ\ 24'\frac{6923}{7476}$ ha per seno 0,8863283, e però la corda di BQR sarà$=1{,}7726566$. Ora posto il raggio$=1$; si ha l'area del cerchio $=3{,}1415926$, che ha per logaritmo 0,4971499. La metà di questo logaritmo cioè $0{,}2485749=$ $=\log\sqrt{3{,}1415926}$ si trova essere $\log 1{,}772453$. Si ha dunque l'errore di 0,0002 circa, il che dà un'approssimazione sufficiente.

271. Invece della AN si avrebbe potuto adoperare la dL o la cM, che si devono trovare eguali alla stessa AN.

Dim. Se si guidi la dL e la Dp alla sua metà in p; sarà $\text{sen}LDp=\frac{Lp}{DL}$. Ma l'angolo LDp $={}^1/_2 LDd={}^1/_2(BDd-BDL)=$ $=30^\circ-BDn$. Dunque (§ 155) $\text{sen}LDp={}^1/_2\cos BDn-{}^1/_2\sqrt{3}\times \text{sen}BDn={}^1/_2 . {}^1/_6\sqrt{33}-{}^1/_2\sqrt{3}\times{}^1/_6\sqrt{3}$. Quindi $Lp=DL \,.\, \text{sen}LDp=$ $/_4\sqrt{11}-{}^1/_4\sqrt{3}$ ed $Ld={}^1/_2\sqrt{11}-{}^1/_2\sqrt{3}=AN$.

272. Dato (fig. 104) il lato AB d' un quadrato, trovare il raggio di un cerchio, che gli sia prossimamente eguale in area.

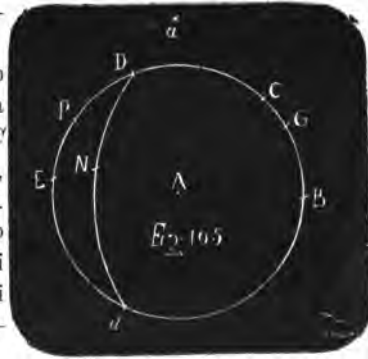
Sol. Col raggio AB, centro A si descriva la circonferenza $BCFDLPMEd$. Si faccia ad $AB=BC=CD=Ed$. Col centro B, e col raggio BD si descriva l'arco $dnNDa$. Collo stesso raggio, e col centro E si tagli quest' arco in a. Si faccia ad $Aa=BF=Db=db$. Quindi ad $AB=Dn=dN$. Col centro C, e col raggio CN si tagli la circonferenza in P. Si faccia ad $Nn=PM$; quindi ad $Fb=CL$. Sarà LM il lato cercato.

Dim. Se si supponga $AB=1$, avendo il triangolo BNd i lati rispettivamente eguali ai lati del triangolo BDL della fig. 103, si avrà $\text{sen}\,{}^1/_2 dBN={}^1/_6\sqrt{3}$; $\cos{}^1/_2 dBN={}^1/_6\sqrt{33}$ (§ 271). Quindi $\text{sen}\,dBN=2\,\text{sen}\,{}^1/_2 dBN\,.\,\cos{}^1/_2 dBN$ (§ 155)$={}^1/_6\sqrt{11}$; $\cos dBN=$ $=\sqrt{1-\text{sen}^2 dBN}={}^5/_6$. Essendo poi CBd angolo retto (31, lib. III), sarà $\cos CBN=\text{sen}\,dBN={}^1/_6\sqrt{11}$. Ma si ha dalla Trigonometria $(CN)^2=(BC)^2+(BN)^2-2BC\,.\,BN\,.\cos CBN$. Dunque $CN=$ $=\sqrt{4-2\sqrt{3}\,.\,{}^1/_6\sqrt{11}}=\sqrt{4-{}^1/_3\sqrt{33}}=1{,}4440025$, che si trova essere corda di $92^\circ\,26'\frac{804}{2013}=CP$. Essendo poi $\text{sen}\,NBE=\frac{{}^1/_2\,Nd}{BN}$ $=\text{sen}(CBE-CBN)=$ (§ 155) $\text{sen}\,60^\circ\cos CBN-\cos 60^\circ\,.\,\text{sen}\,CBN$ $={}^1/_2\sqrt{3}\times{}^1/_6\sqrt{11}-{}^1/_2\,.\,{}^5/_6$; sarà $Nn=2BN\times\text{sen}\,NBE={}^1/_6\,(\sqrt{11}-5\sqrt{3})$ $=0{,}2149367$, che si trova essere corda di $12^\circ\,20'\frac{946}{2892}=PM$.

Sarà dunque l'arco $CPM=104^\circ\,46'\frac{4220}{5821}$, dal quale sottratto l' arco CL, che è una quinta parte della circonferenza (§ 40) $=72^\circ$, resterà l'arco $LM=32^\circ\,46'\frac{4220}{5821}$, la corda del quale si trova $=0{,}5643274$. Ora posto π il rapporto della circonferenza al diametro, ed R il raggio di un cerchio, si ha la sua area$=\pi R^2$, come è noto. Fatto dunque $\pi R^2=1$, che è l' area del quadrato di raggio $AB=1$, al quale si vuole eguale il cerchio, si avrà $R=\sqrt{\frac{1}{\pi}}$, e $\log R=-{}^1/_2\log\pi=-0{,}2485749=-1+0{,}7514251$ $=\log.0{,}5641896$. Non si commetterà dunque l'errore di 0,0002.

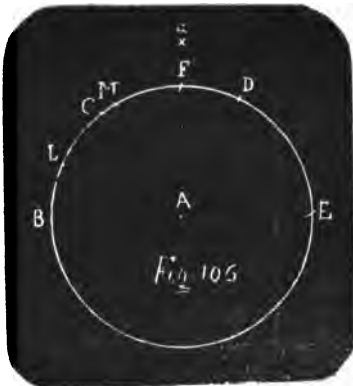
273. *Prob.* Dato (fig. 105) il raggio AB d'una sfera, trovare

il lato di un cubo eguale prossimamente in solidità alla medesima.

Sol. Col raggio AB, centro A descritta la circonferenza $BGCDPEd$; si faccia ad $AB=BC=CD=DE=Ed$. Col centro B, raggio BD si segni l'arco $aDNd$. Collo stesso raggio, e col centro E si tagli quest' arco in a. Si faccia ad $AB=aG=dN$. Quindi a $CN=CP$. Sarà PG il lato cercato.

Dim. Poichè sarà (§ 272) CN corda di $9^{\circ}\,26'\frac{804}{2013}$. Sarà poi $GC=15^{\circ}$ (§ 32). Quindi $PG=107^{\circ}\,26'\frac{804}{2013}$, del quale arco la corda si trova essere eguale a 1,6122696, supponendo $AB=1$. Ora nella stessa supposizione, e supposto il rapporto della circonferenza al diametro$=\pi$; si ha la solidità della sfera$=\frac{4}{3}\pi$, e il suo logaritmo$=\log 4+\log\pi-\log 3=0{,}6220886$, il di cui terzo 0,2073628 si trova essere logaritmo di 1,611991. Laonde l'errore che si commette, non arriva a 0,0003.

274. Dato (fig. 106) il lato AB di un cubo, trovare il raggio d'una sfera, che gli sia prossimamente eguale in solidità.

Sol. Col raggio AB, centro A si descriva la circonferenza $BLCMFDE$. Si faccia ad $AB==BC=CD=DE$. Quindi a $BD=Ba=Ea$; quindi ad $Aa=BF$; quindi ad $Fa=FM$, ad $FA=FL$. Sarà LM il raggio cercato.

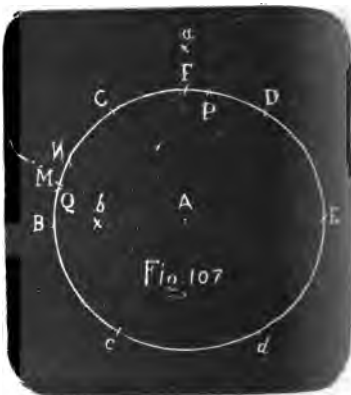
Dim. Sarà l' arco $FL=60^{\circ}$ 15, lib. IV). Si ha poi (posto $AB=1$) $aF=Aa-AF=\sqrt{2}-1$ (§ 27)$=0{,}4142136$, che si trova

essere corda di $23^\circ\,54'\frac{976}{2846}$. Sarà dunque l'arco $LM=36^\circ 5'\frac{1870}{2846}$, il quale ha per corda 0,6195986. Ora essendo, come è noto, la solidità d'una sfera di raggio R espressa dalla formola $^4/_3\pi R^3$, fatto $^4/_3\pi R^3=1$, che è la solidità del dato cubo, si avrà $\log R$ $=\frac{\log 3-\log 4-\log\pi}{3}=-1+0{,}7926371=\log 0{,}6203504$. L'errore dunque, che si commette per difetto, non arriva a 0,0008.

275. Tutte queste approssimazioni nella rettificazione, quadratura e cubatura della circonferenza, del cerchio e della sfera, e nei Problemi inversi, non lasciando errori di una millesima di raggio, si stimano essere sufficienti per la pratica. Chi ne volesse di più avanzate, non avrà a far altro, che trovare col calcolo di quale arco in gradi e minuti sia corda quella quantità lineare, che cerca; quindi ricavare questa corda dal cerchio dopo d'averlo diviso in quei gradi e minuti, che occorrono, adoperando i metodi dimostrati qui sopra (§§ 236 e 244).

276. *Prob.* Duplicare il cubo per approssimazione.

Sol. I. Sia (fig. 107) AB il lato del cubo, che si vuol duplicare. Col centro A, e col raggio AB descritta la circonferenza $BQMNCFPDEdc$, e fatto in essa ad $AB=BC=CD=DE$; quindi a $BD=Ba=Ea$; quindi ad $Aa=BF$; quindi ad $FA=FN$; sarà aN prossimamente il lato del cubo doppio.

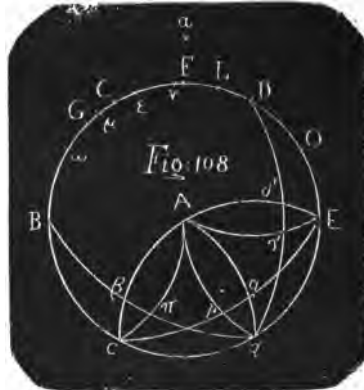
Fig. 107

Dim. Sarà l'arco BN una duodecima della circonferenza (§ 31)$=30^\circ$. Se s'introduce quest'arco $BN=A$ nell'equazione (1); l'arco A', del quale è corda la aN, risulterà$=78^\circ\,2'\frac{2358}{2846}$. Si ha dunque (posto $AB=1$) $aN=$ $=2\,\mathrm{sen}\,39^\circ\,1'\frac{1179}{2846}=1{,}2592800$. Si ha poi $\sqrt[3]{2}=1{,}2599209$. Non si commette dunque un difetto di 0,0007.

Sol. II. Se si volesse un'esattezza maggio; fatta la costruzione della Soluzione I, e fatto inoltre ad $AB = Ed = dc$; quindi ad $Aa = BF = Db = db$; quindi ad $aN = cM = MP$; quindi ad $Fb = FQ$; sarà PQ il lato cercato con molto maggiore approssimazione.

Dim. Essendo per la dimostrazione della Soluzione I, l'arco $cM = 78^{\circ}\, 2' \frac{2358}{2846} = MP$; sarà l'arco $cMP = 146^{\circ}\, 5' \frac{1870}{2846}$. Sottratto poi l'arco $FQ = 72^{\circ}$ (§ 40) dall'arco $FBc = 150^{\circ}$ (§§ 27, 29); resterà l'arco $cQ = 78^{\circ}$, il quale sottratto dall' arco cMP lascierà l'arco $QP = 78^{\circ}\, 5' \frac{1870}{2846}$; la corda del quale si trova essere $= 1,2599190$. Non si commetterà dunque, se non un difetto di $0,0000019$, cioè di due millionesime di raggio appena.

277. *Prob.* Triplicare, quadruplicare ecc. il cubo fino alla ottuplicazione (fig. 108).

Sol. Sia $A\,B$ il lato del cubo dato. Col raggio AB, e col centro A si descriva la circonferenza $B\omega G\mu C\varepsilon\nu FLDOEdc$. Si faccia in essa ad $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$. Collo stesso raggio $A\,B$, e coi centri B, c, d, E, D si descrivano gli archi $A\pi c$, Aqd, $c\beta A\delta E$, Apd, $A\tau E$. Col raggio BD, centro B si descriva l' arco $d\tau\delta Da$; collo stesso raggio, e col centro E si tagli quest'arco in a. Collo stesso raggio, e coi centri C e D si descrivano gli archi $cpqE$, $B\beta\pi d$. Si faccia ad $Aa = BF$; quindi ad $AB = FO = aG = GL$; quindi ad $EL = a\omega$; quindi a $\pi\tau = B\varepsilon$; quindi a $p\delta = B\mu$; a $q\tau = \mu\nu$. Si avrà

aO		duplo (§ 276)
$C\delta$	lato	triplo
OG	del	quadruplo
$O\omega$	cubo	quintuplo
$c\varepsilon$		sestuplo
$c\nu$		settuplo
BE		ottuplo.

Dim. Posto $AB=1$; si avrà (§ 272) $C\delta=\sqrt{4-{}^1/_3\sqrt{33}}=$ 1,4440033. Si ha poi $\sqrt[3]{3}=1,4422493$. L'eccesso dunque non arriva a 0,002.

Essendo l'arco $OFG=105^\circ$ (§ 29, 30), sarà la sua corda $OG=2\ \mathrm{sen}52^\circ\,30'=1,5867066$. Si ha poi $\sqrt[3]{4}=1,5874007$. Il difetto dunque è di 0,0007 circa.

Sarà poi l'arco $EL={}^5/_{24}$ della circonferenza (§ 32) $=75^\circ$. Se nell'equazione (4) s'introduce $A'=75^\circ$; risulta l'arco $A=B\omega$ $=32^\circ\,27'\,\frac{27}{2454}$. Sarà dunque $F\omega=57^\circ\,32'\,\frac{2427}{2454}$. Quindi essendo $FO=60^\circ$ (15, lib. IV), sarà l'arco $OF\omega=117^\circ\,32'\,\frac{2427}{2454}$, che ha per corda 1,7102744. Si ha poi $\sqrt[3]{5}=1,7099757$. L'eccesso dunque non arriva a 0,0003.

Essendo $BD=B\tau=D\pi=\sqrt{3}$ e $D\tau=B\pi=1$; sarà (§ 23) $\pi\tau.BD=(BD)^2-(B\pi)^2$; cioè $\pi\tau.\sqrt{3}=2$; quindi $\pi\tau={}^2/_3\sqrt{3}=1,1547005$, che si trova essere corda di $70^\circ\,31'\,\frac{1725}{2375}=B\varepsilon$. Sarà dunque l'arco $cB\varepsilon=130^\circ\,31'\,\frac{1725}{2375}$, il quale ha per corda 1, 8164964. Si ha poi $\sqrt[3]{6}=1,8171204$. Si commette dunque un difetto minore di 0,0007.

I due triangoli $C\delta p$, $Bp\delta$, avendo i lati rispettivamente eguali, saranno eguali (8, 26 lib. I); ed essendo sulla stessa base $p\delta$, saranno tra le stesse parallele $p\delta$, BC (39, lib. I). Sarà dunque l'angolo $BC\delta=B\delta p$ (27, lib. I). Dunque $\cos CB\delta$ $={}^1/_6\sqrt{11}$ (§ 272) $=\cos B\delta p$. Si ha poi dalla Trigonometria $(Bp)^2$ $=(B\delta)^2+(p\delta)^2-2B\delta\,.\,p\delta\,\cos B\delta p$; ed essendo $Bp=C\delta$, poichè si determina colla stessa costruzione; si avrà $4-{}^1/_3\sqrt{33}=3+$ $(p\delta)^2-2p\delta\,.\,\sqrt{3}\,.\,{}^1/_6\sqrt{11}$; quindi $1-{}^1/_3\sqrt{33}=(p\delta)^2-p\delta\,.\,{}^1/_6\sqrt{33}$. Aggiungendo da una parte, e dall'altra dell'equazione il quadrato di ${}^1/_6\sqrt{33}$; risulterà $(1-{}^1/_6\sqrt{33})^2=(p\delta-{}^1/_6\sqrt{33})^2$; quindi $p\delta-{}^1/_6\sqrt{33}$ $=\pm(1-{}^1/_6\sqrt{33})$. Si ha poi (§ 23) $p\delta\,.\,dE=(dE)^2-(pd)^2$; cioè $p\delta$ $=1-(pd)^2$; e quindi minore dell'unità; quindi si determinerà $p\delta={}^1/_3\sqrt{33}-1=0,9148541$, che si trova essere corda di $54^\circ\,26\,\frac{1408}{2586}$. Si ha poi $q\tau=LM$ della Fig. 103 = alla corda dell'arco

$31° 28' \frac{2518}{2799}$ (§ 270). Dunque l'arco $cB\mu\nu = 60° + 54° 26' \frac{1408}{2588} +$ $31° 28' \frac{2513}{2799} = 145° 55' \frac{1607}{1022}$; del quale arco si trova essere la corda $c\nu = 1,9122214$. Si ha poi $\sqrt[3]{7} = 1,9129309$. Si commette dunque un difetto minore di 0,000702.

Si ha poi $BE = 2 = \sqrt[3]{8}$. Dunque ecc.

278. *Prob.* Sudduplicare il cubo prossimamente.

Sol. Sia AB il lato del cubo dato. (Fig. 108). Si descriva col centro A, raggio AB la circonferenza $BCDEd$, e si faccia ad $AB = BC = CD = DE = Ed$; quindi col raggio BD, centro B si segni l'arco $D\delta d$. Col centro d, raggio dA si segni l'arco $A\delta E$. Sarà $D\delta$ il lato cercato.

Dim. La $D\delta$ di questa Figura è determinata come la dL della Fig. 103. Sarà dunque (§ 270) $D\delta = 0,7922869$. Ora si ha $\sqrt[3]{1/2} = 0,7937039$. Si commette dunque un difetto minore di 0, 002.

279. Non abbiamo voluto ommettere le Soluzioni di questi due ultimi Problemi (§§ 277 278), benchè alcuni risultati contengano errori di una o di due millesime, e gli altri di qualche diecimillesima; perchè in molti casi tali errori riusciranno trascurabili, e dall'altra parte le Soluzioni ci sono sembrati semplici. Si potrebbero avere valori molto più esatti, qualora facesse d'uopo non solo per formare cubi nei rapporti espressi qui sopra, ma anche in altri, se si cercasse di qual arco espresso in gradi, minuti e parti di minuti sieno corde le radici cubiche, o le metà, terzi ecc. delle radici cubiche richieste alla costruzione del cubo cercato, e si ricavassero poi queste corde dal cerchio diviso appunto in gradi minuti ecc. (§§ 244, 245 ecc.), e s'impiegassero poi queste corde, o i loro multipli (§§ 64, 65) alla stessa costruzione del cubo.

280. E qui sia fine ormai a questa *Geometria del Compasso,* che se non dispiacerà ai Geometri, e se potrà in qualche modo servire agli Artisti, ai Disegnatori, e specialmente ai Divisori de' cerchj par gli usi Geografici ed Astronomici; io mi troverò della lunga noja divorata nel comporla abbastanza ricompensato.

INDICE